

Schémas préservant la structure pour des équations aux dérivées partielles stochastiques

Charles-Edouard Bréhier

Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)
Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications (LMAP)

CANUM 2026

Plan

Un schéma de splitting préservant la positivité

Un schéma d'Euler modifié préservant la régularité

Un schéma préservant l'asymptotique

Conclusion

Plan

Un schéma de splitting préservant la positivité

Un schéma d'Euler modifié préservant la régularité

Un schéma préservant l'asymptotique

Conclusion

Equation de la chaleur stochastique avec bruit multiplicatif

On considère l'EDP stochastique

$$\begin{cases} du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t), & t > 0, x \in \mathcal{D}, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où

- ▶ $\mathcal{D} = (0, 1)^d$,
- ▶ β est un mouvement Brownien,
- ▶ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , g' est borné et $g(0) = 0$.

Equation de la chaleur stochastique avec bruit multiplicatif

On considère l'EDP stochastique

$$\begin{cases} du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t), & t > 0, x \in \mathcal{D}, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où

- ▶ $\mathcal{D} = (0, 1)^d$,
- ▶ β est un mouvement Brownien,
- ▶ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , g' est borné et $g(0) = 0$.

Formulation abstraite comme équation d'évolution stochastique dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathcal{D})$:

$$\begin{cases} du(t) = Au(t)dt + g(u(t))d\beta(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

SHE avec bruit multiplicatif

On considère des solutions *mild*: pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}$

$$u(t, x) = \int_{\mathcal{D}} G(t-s, x, y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(t-s, x, y) g(u(s, y)) dy d\beta(s)$$

et

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(u(s)) d\beta(s),$$

où

- ▶ $G : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le **noyau de la chaleur**,
- ▶ $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est le **semi-groupe de la chaleur** dans $H = L^2(\mathcal{D})$,

avec conditions de Dirichlet homogènes au bord.

SHE avec bruit multiplicatif

On considère des solutions *mild*: pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}$

$$u(t, x) = \int_{\mathcal{D}} G(t-s, x, y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} G(t-s, x, y) g(u(s, y)) dy d\beta(s)$$

et

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(u(s)) d\beta(s),$$

où

- ▶ $G : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le **noyau de la chaleur**,
- ▶ $(e^{tA})_{t \geq 0}$ est le **semi-groupe de la chaleur** dans $H = L^2(\mathcal{D})$,

avec conditions de Dirichlet homogènes au bord.

Il existe une unique solution mild.

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Le mouvement Brownien $(\beta(t))_{t \geq 0}$ est un processus continu et Gaussien tel que

$$\beta(t) - \beta(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Ses trajectoires sont p.s. de régularité Hölder $C^{1/2-}$.

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Le mouvement Brownien $(\beta(t))_{t \geq 0}$ est un processus continu et Gaussien tel que

$$\beta(t) - \beta(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s), \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Ses trajectoires sont p.s. de régularité Hölder $C^{1/2-}$.

L'intégrale stochastique d'Itô est associée à la méthode des rectangles à gauche:

$$\int_0^T X(t) d\beta(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} X(t_n) (\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)), \quad t_n = nT/N.$$

Exemple: $\int_0^T \beta(t) d\beta(t) = \frac{\beta(T)^2 - T}{2}.$

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Une équation différentielle stochastique (au sens Itô)

$$dX(t) = g(X(t))d\beta(t)$$

s'interprète sous forme intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(X(s))d\beta(s), \quad \forall t \geq 0?$$

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Une équation différentielle stochastique (au sens Itô)

$$dX(t) = g(X(t))d\beta(t)$$

s'interprète sous forme intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(X(s))d\beta(s), \quad \forall t \geq 0?$$

Exemple: la solution de l'EDS linéaire

$$dX(t) = \sigma X(t)d\beta(t)$$

est donnée par

$$X(t) = \exp\left(\sigma\beta(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right) X(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Pour construire des solutions approchées, on peut utiliser le **schéma d'Euler–Maruyama** de pas de temps $\tau = T/N$: pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \sigma(X_n)(\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)) \\ &= X_n + \sqrt{\tau}\sigma(X_n)\gamma_n, \end{aligned}$$

Rappels sur le mouvement Brownien et les EDS

Pour construire des solutions approchées, on peut utiliser le **schéma d'Euler–Maruyama** de pas de temps $\tau = T/N$: pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= X_n + \sigma(X_n)(\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)) \\ &= X_n + \sqrt{\tau}\sigma(X_n)\gamma_n,\end{aligned}$$

Résultats de convergence:

- ▶ **ordre fort 1/2:** $(\mathbb{E}[|X_N - X(N\tau)|^2])^{\frac{1}{2}} \lesssim \tau^{1/2}$,
- ▶ **ordre faible 1:** $|\mathbb{E}[\varphi(X_N)] - \mathbb{E}[\varphi(X(N\tau))]| \lesssim \tau$.

SHE avec bruit multiplicatif

Si $g(0) = 0$ et $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, alors p.s.

$$u(t, x) \geq 0, \quad \forall t > 0, x \in \mathcal{D}.$$

Evolution stochastique en temps continu \rightarrow préserve la positivité.

SHE avec bruit multiplicatif

Si $g(0) = 0$ et $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, alors p.s.

$$u(t, x) \geq 0, \quad \forall t > 0, x \in \mathcal{D}.$$

Evolution stochastique en temps continu \rightarrow préserve la positivité.

Exemple d'intégrateur numérique: le schéma d'Euler exponentiel stochastique

$$u_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y) u_n(y) dy + \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y) g(u_n(y)) dy \delta\beta_n$$
$$u_{n+1} = e^{\tau A} (u_n + g(u_n) \delta\beta_n)$$

avec les incréments browniens $\delta\beta_n = \beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)$, $t_n = n\tau$.

SHE avec bruit multiplicatif

Si $g(0) = 0$ et $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, alors p.s.

$$u(t, x) \geq 0, \quad \forall t > 0, x \in \mathcal{D}.$$

Evolution stochastique en temps continu \rightarrow préserve la positivité.

Exemple d'intégrateur numérique: le schéma d'Euler exponentiel stochastique

$$u_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y) u_n(y) dy + \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y) g(u_n(y)) dy \delta\beta_n$$
$$u_{n+1} = e^{\tau A} (u_n + g(u_n) \delta\beta_n)$$

avec les incréments browniens $\delta\beta_n = \beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)$, $t_n = n\tau$.

Schéma numérique \rightarrow ne préserve pas la positivité car $\delta\beta_n \sim \mathcal{N}(0, \tau)$.

Schéma de splitting préservant la positivité

Application d'un schéma de splitting: résoudre

- ▶ les équations différentielles stochastiques

$$dv(t, x) = g(v(t, x))d\beta(t) \text{ (paramétrées par } x \in \mathcal{D})$$

- ▶ l'équation aux dérivées partielles linéaire $\dot{w}(t) = Aw(t)$.

Schéma de splitting préservant la positivité

Application d'un schéma de splitting: résoudre

- ▶ les équations différentielles stochastiques

$$dv(t, x) = g(v(t, x))d\beta(t) \text{ (paramétrées par } x \in \mathcal{D})$$

- ▶ l'équation aux dérivées partielles linéaire $\dot{w}(t) = Aw(t)$.

Peut-on construire un schéma préservant la positivité pour la partie EDS?

Schéma de splitting préservant la positivité

Application d'un schéma de splitting: résoudre

- ▶ les équations différentielles stochastiques

$$dv(t, x) = g(v(t, x))d\beta(t) \text{ (paramétrées par } x \in \mathcal{D})$$

- ▶ l'équation aux dérivées partielles linéaire $\dot{w}(t) = Aw(t)$.

Peut-on construire un schéma préservant la positivité pour la partie EDS?

- Si $g(u) = \sigma u$: la solution exacte est connue

$$v(t_{n+1}, x) = \exp\left(\sigma\delta\beta_n - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right)v(t_n, x).$$

Schéma de splitting préservant la positivité

Application d'un schéma de splitting: résoudre

- ▶ les équations différentielles stochastiques

$$dv(t, x) = g(v(t, x))d\beta(t) \text{ (paramétrées par } x \in \mathcal{D})$$

- ▶ l'équation aux dérivées partielles linéaire $\dot{w}(t) = Aw(t)$.

Peut-on construire un schéma préservant la positivité pour la partie EDS?

- Si $g(u) = \sigma u$: la solution exacte est connue

$$v(t_{n+1}, x) = \exp\left(\sigma\delta\beta_n - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right)v(t_n, x).$$

- Cas général: on peut factoriser $g(u) = f(u)u$, d'où le schéma

$$v_{n+1}(x) = \exp\left(f(v_n(x))\delta\beta_n - \frac{f(v_n(x))^2\tau}{2}\right)v_n(x).$$

Schéma de splitting préservant la positivité

On propose le schéma de splitting explicite

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1}(x) = \exp\left(f(u_n(x))\delta\beta_n - \frac{f(u_n(x))^2\tau}{2}\right)u_n(x), \\ u_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y)\tilde{u}_{n+1}(y)dy, \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$u_{n+1} = e^{\tau A} \left(\exp\left(f(u_n)\delta\beta_n - \frac{f(u_n)^2\tau}{2}\right)u_n \right).$$

Schéma de splitting préservant la positivité

On propose le schéma de splitting explicite

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1}(x) = \exp\left(f(u_n(x))\delta\beta_n - \frac{f(u_n(x))^2\tau}{2}\right)u_n(x), \\ u_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y)\tilde{u}_{n+1}(y)dy, \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$u_{n+1} = e^{\tau A} \left(\exp\left(f(u_n)\delta\beta_n - \frac{f(u_n)^2\tau}{2}\right)u_n \right).$$

- Ce schéma préserve la positivité, for any $\tau > 0$.

Schéma de splitting préservant la positivité

On propose le schéma de splitting explicite

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1}(x) = \exp\left(f(u_n(x))\delta\beta_n - \frac{f(u_n(x))^2\tau}{2}\right)u_n(x), \\ u_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} G(\tau, x, y)\tilde{u}_{n+1}(y)dy, \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$u_{n+1} = e^{\tau A} \left(\exp\left(f(u_n)\delta\beta_n - \frac{f(u_n)^2\tau}{2}\right)u_n \right).$$

- Ce schéma préserve la positivité, for any $\tau > 0$.
- Ordre fort 1/2: bornes sur l'erreur quadratique moyenne

$$\sup_{n\tau \leq T} \sup_{x \in \mathcal{D}} \left(\mathbb{E}[|u_n(x) - u(t_n, x)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(T)\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Le cas du bruit-blanc espace-temps

On considère l'EDP stochastique avec bruit multiplicatif

$$\begin{cases} du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))dW(t, x), & t > 0, x \in \mathcal{D}, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où W est un processus de Wiener cylindrique:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) e_k(x)$$

- ▶ $(\beta_k)_{k \geq 1}$ est une suite de mouvements Browniens réels indépendants,
- ▶ $(e_k)_{k \geq 1}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathcal{D})$.

Le cas du bruit-blanc espace-temps

On considère l'EDP stochastique avec bruit multiplicatif

$$\begin{cases} du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))dW(t, x), & t > 0, x \in \mathcal{D}, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\mathcal{D}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où W est un processus de Wiener cylindrique:

$$W(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) e_k(x)$$

- ▶ $(\beta_k)_{k \geq 1}$ est une suite de mouvements Browniens réels indépendants,
- ▶ $(e_k)_{k \geq 1}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathcal{D})$.

On doit supposer $d = 1$, i.e. $\mathcal{D} = (0, 1)$.

Schéma préservant la positivité

On ne peut plus discrétiser uniquement en temps.

La discrétisation spatiale est réalisée par **différences finies**, de pas $h = 1/(J + 1)$.

Schéma préservant la positivité

On ne peut plus discrétiser uniquement en temps.

La discrétisation spatiale est réalisée par **différences finies**, de pas $h = 1/(J + 1)$.

Schéma de splitting:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1,j} = \exp\left(f(u_{n,j}) \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}} \gamma_{n,j} - \frac{f(u_{n,j})^2 \tau}{2h}\right) u_{n,j}, & 1 \leq j \leq J, \\ u_{n+1} = e^{\frac{\tau}{h^2} D_h} \tilde{u}_{n+1}, \end{cases}$$

où $(\gamma_{n,j})_{n \geq 0, 1 \leq j \leq J}$ sont des variables aléatoires **indépendantes** $\mathcal{N}(0, 1)$ et D_h est le Laplacien discret.

Interprétation: $\frac{1}{h} \int_{jh}^{(j+1)h} (W(t_{n+1}, y) - W(t_n, y)) dy \sim \mathcal{N}(0, \frac{\tau}{h})$.

Propriétés du schéma

- Si $u_0 \geq 0$, alors p.s. $u(t, x) \geq 0$ pour tous $t \geq 0$ et $x \in (0, 1)$.
- Le schéma **préserve la positivité** quels que soient $\tau > 0$ and $h > 0$: si $u_0 \geq 0$, alors p.s. $u_{n,j} \geq 0$ pour tous n, j .

Propriétés du schéma

- Si $u_0 \geq 0$, alors p.s. $u(t, x) \geq 0$ pour tous $t \geq 0$ et $x \in (0, 1)$.
- Le schéma **préserve la positivité** quels que soient $\tau > 0$ and $h > 0$: si $u_0 \geq 0$, alors p.s. $u_{n,j} \geq 0$ pour tous n, j .
- **Bornes sur les moments**: sous une **condition de type CFL** $\tau \leq \gamma h$ (où $\gamma > 0$ est arbitraire), alors

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \mathbb{E}[|u_{n,j}|^2] \lesssim_{\gamma, T} \|u_0\|_{\infty}^2.$$

Estimations d'erreur

- On a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \tau^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\tau}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

Estimations d'erreur

- On a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \tau^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\tau}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

- En prenant en compte la condition $\tau \leq \gamma h$ on a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \left(\frac{\tau}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

Estimations d'erreur

- On a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \tau^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{\tau}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

- En prenant en compte la condition $\tau \leq \gamma h$ on a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \left(\frac{\tau}{h} \right)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

- Sous la condition CFL $\tau \leq \gamma h^2$ on a

$$\sup_{0 \leq n\tau \leq T} \sup_{1 \leq j \leq J} \left(\mathbb{E}[|u_{n,j} - u(t_n, jh)|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim_{\gamma, T, u_0} \tau^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{1}{2}}.$$

Résultats numériques

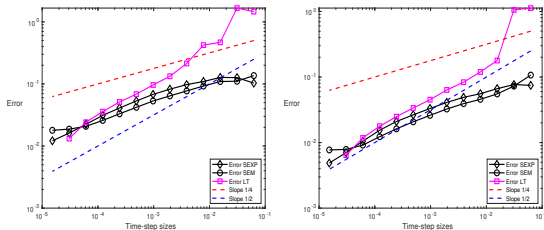


Figure: Erreurs fortes sur l'intervalle de temps $[0, 0.5]$ pour le schéma de splitting (LT), le schéma d'Euler exponentiel stochastique (SEXP), et un schéma d'Euler–Maruyama semi-implicite (SEM).

Pas $h = 2^{-8}$ et moyenne sur 200 réalisations.

Gauche: $g(v) = v$. Droite: $g(v) = \frac{v}{(1+v^2)}$.

Résultats numériques

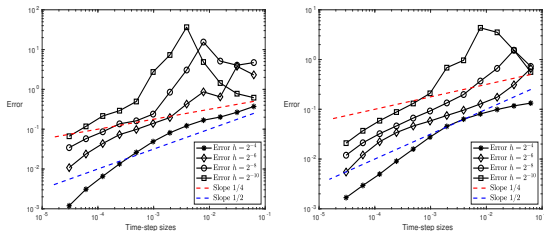


Figure: Erreurs fortes sur l'intervalle de temps $[0, 0.5]$ du schéma de splitting pour différentes valeurs du pas h .

Gauche: $g(v) = v$. Droite: $g(v) = \frac{v}{(1+v^2)}$.

Observation: ordre $1/2$ en τ mais pas uniforme en h .

Quelques extensions (en cours)

- Pour l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t),$$

peut-on démontrer des estimations d'erreur faible

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \mathbb{E}[\varphi(u_N)]| \lesssim \tau?$$

(pour des fonctions $\varphi : H = L^2(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^2)

Quelques extensions (en cours)

- Pour l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t),$$

peut-on démontrer des estimations d'erreur faible

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \mathbb{E}[\varphi(u_N)]| \lesssim \tau?$$

(pour des fonctions $\varphi : H = L^2(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^2)

- Peut-on démontrer des estimations d'erreur faible dans le cas bruit-blanc espace-temps?

Quelques extensions (en cours)

- Pour l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t),$$

peut-on démontrer des estimations d'erreur faible

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \mathbb{E}[\varphi(u_N)]| \lesssim \tau?$$

(pour des fonctions $\varphi : H = L^2(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^2)

- Peut-on démontrer des estimations d'erreur faible dans le cas bruit-blanc espace-temps?
- Peut-on construire des schémas d'ordre fort 1 en utilisant un schéma préservant la positivité d'ordre élevé pour la partie EDS?

Quelques extensions (en cours)

On considère l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t),$$

et on suppose que $g(-1) = g(1) = 0$.

Alors $u(t, x) \in [-1, 1]$ p.s. pour tous $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}$.

Quelques extensions (en cours)

On considère l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Delta u(t, x)dt + g(u(t, x))d\beta(t),$$

et on suppose que $g(-1) = g(1) = 0$.

Alors $u(t, x) \in [-1, 1]$ p.s. pour tous $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}$.

- Peut-on construire un schéma préservant le domaine $[-1, 1]$? Quel est l'ordre de convergence?

Travail en cours avec David Cohen & Gijs Custers.

- Peut-on traiter le cas bruit-blanc espace-temps?

Quelques extensions (en cours)

Idée de la construction de schémas préservant le domaine:

- ▶ considérer l'EDS au sens Itô

$$dX_t = g(X_t)dB_t$$

- ▶ écrire $g(u) = f(u)(u-1)(u+1)$,
- ▶ identifier un schéma préservant le domaine

$$Y_{n+1} = \Phi(Y_n, \tau, \delta B_n)$$

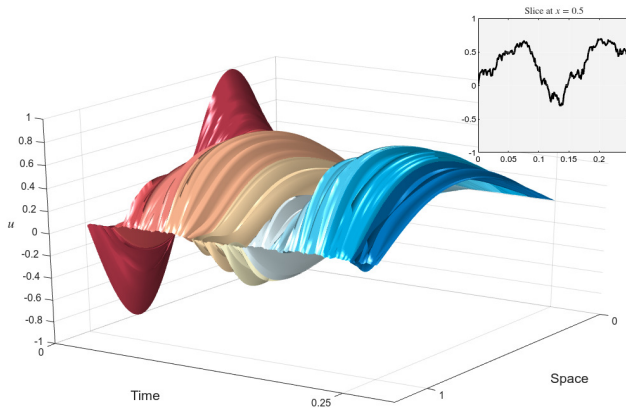
pour l'EDS auxiliaire au sens Itô

$$dY_t = (Y_t - 1)(Y_t + 1)dB_t,$$

- ▶ et définir le schéma

$$X_{n+1} = \Phi(X_n, f(X_n)^2\tau, f(X_n)\delta B_n).$$

Schéma préservant l'intervalle $[-1, 1]$: illustration



Plan

Un schéma de splitting préservant la positivité

Un schéma d'Euler modifié préservant la régularité

Un schéma préservant l'asymptotique

Conclusion

Description du modèle

EDP stochastique parabolique semilinéaire:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x (a(x) \partial_x u(t, x)) + f(u(t, x)) + \dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

Le système est perturbé par un **bruit-blanc espace-temps** $\dot{W}(t, x)$.

La fonction f est Lipschitzienne.

Description du modèle

EDP stochastique parabolique semilinéaire:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x (a(x) \partial_x u(t, x)) + f(u(t, x)) + \dot{W}(t, x), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

Le système est perturbé par un **bruit-blanc espace-temps** $\dot{W}(t, x)$.

La fonction f est Lipschitzienne.

Cette EDPS est vue comme **équation d'évolution stochastique**

$$\begin{cases} du(t) = -\Lambda u(t)dt + F(u(t))dt + dW(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

d'inconnue $u(t) = u(t, \cdot) \in H = L^2(0, 1)$ (espace de Hilbert).
Elle dépend d'un **processus de Wiener cylindrique**.

Solutions mild de l'EDPS

Décomposition spectrale de l'opérateur linéaire Λ : $\Lambda e_j = \lambda_j e_j$.

Solution de l'équation d'évolution linéaire $\dot{u} = -\Lambda u$:

semigroupe

$$u(t) = e^{-t\Lambda} u(0), \quad \forall t \geq 0,$$

with $e^{-t\Lambda} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_j} \langle e_j, \cdot \rangle e_j$.

Solutions mild de l'EDPS

Décomposition spectrale de l'opérateur linéaire Λ : $\Lambda e_j = \lambda_j e_j$.

Solution de l'équation d'évolution linéaire $\dot{u} = -\Lambda u$:

semigroupe

$$u(t) = e^{-t\Lambda} u(0), \quad \forall t \geq 0,$$

with $e^{-t\Lambda} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_j} \langle e_j, \cdot \rangle e_j$.

Propriété de régularisation: pour tout $\alpha > 0$

$$\|\Lambda^\alpha e^{-t\Lambda} u\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} |u|, \quad t > 0, u \in H.$$

Solutions mild de l'EDPS

Décomposition spectrale de l'opérateur linéaire Λ : $\Lambda e_j = \lambda_j e_j$.

Solution de l'équation d'évolution linéaire $\dot{u} = -\Lambda u$:

semigroupe

$$u(t) = e^{-t\Lambda} u(0), \quad \forall t \geq 0,$$

with $e^{-t\Lambda} = \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-t\lambda_j} \langle e_j, \cdot \rangle e_j$.

Propriété de régularisation: pour tout $\alpha > 0$

$$\|\Lambda^\alpha e^{-t\Lambda} u\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} |u|, \quad t > 0, u \in H.$$

Solution mild:

$$du(t) = e^{-t\Lambda} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} F(u(s)) ds + \int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s).$$

Processus de Wiener et convolution stochastique

Définition formelle du processus de Wiener cylindrique:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j$$

avec β_j , $j \in \mathbb{N}$, mouvement Browniens i.i.d.

Processus de Wiener et convolution stochastique

Définition formelle du processus de Wiener cylindrique:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j$$

avec β_j , $j \in \mathbb{N}$, mouvement Browniens i.i.d.

La convolution stochastique $\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)$ est bien définie:

$$\mathbb{E}[\|\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)\|^2] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_j} ds \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_j} < \infty$$

grâce à la propriété de régularisation du semigroupe.

Processus de Wiener et convolution stochastique

Définition formelle du processus de Wiener cylindrique:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j$$

avec β_j , $j \in \mathbb{N}$, mouvement Browniens i.i.d.

La convolution stochastique $\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)$ est bien définie:

$$\mathbb{E}[\|\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)\|^2] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_j} ds \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_j} < \infty$$

grâce à la propriété de régularisation du semigroupe.

La solution mild est bien définie.

Processus de Wiener et convolution stochastique

Définition formelle du processus de Wiener cylindrique:

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j$$

avec β_j , $j \in \mathbb{N}$, mouvement Browniens i.i.d.

La convolution stochastique $\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)$ est bien définie:

$$\mathbb{E}[\|\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda} dW(s)\|^2] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_j} ds \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\lambda_j} < \infty$$

grâce à la propriété de régularisation du semigroupe.

La solution mild est bien définie.

Régularité Hölder: $1/4$ — en temps et $1/2$ — en espace.

Le schéma d'Euler semi-implicite standard

Pas de temps: $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$.

Le schéma d'Euler semi-implicite standard

Pas de temps: $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$.

La solution mild vérifie

$$u(t_{n+1}) = e^{-\tau\Lambda}u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda}F(u(s))ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda}dW(s).$$

Approximation par le schéma d'Euler standard:

$$u_{n+1}^{\tau,S} = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^{\tau,S} + \tau F(u_n^{\tau,S}) + \sqrt{\tau}\Gamma_n \right)$$

où $\mathcal{A}_\tau = (I + \tau\Lambda)^{-1}$ et $\Gamma_n = \frac{W(t_{n+1}) - W(t_n)}{\sqrt{\tau}}$.

Le schéma d'Euler semi-implicite standard

Pas de temps: $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$.

La solution mild vérifie

$$u(t_{n+1}) = e^{-\tau\Lambda}u(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda}F(u(s))ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda}dW(s).$$

Approximation par le schéma d'Euler standard:

$$u_{n+1}^{\tau,S} = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^{\tau,S} + \tau F(u_n^{\tau,S}) + \sqrt{\tau}\Gamma_n \right)$$

où $\mathcal{A}_\tau = (I + \tau\Lambda)^{-1}$ et $\Gamma_n = \frac{W(t_{n+1}) - W(t_n)}{\sqrt{\tau}}$.

Résultats de convergence classiques au sens fort et faible:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|u(T) - u_N^{\tau,S}\|_{L^2}] &\lesssim \tau^\alpha \\ |\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \mathbb{E}[\varphi(u_N^{\tau,S})]| &\lesssim \tau^{2\alpha} \end{aligned}$$

pour $\alpha \in (0, 1/4)$ et $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^2 .

Comportement du schéma d'Euler standard

Expérience numérique avec $\tau = 2^{-8}$:

Discrétisation spatiale: différences finies avec $h = 10^{-3}$.

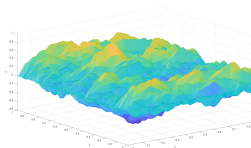


Figure:
 $(t_n, z) \mapsto u_n^{T,S}(z)$

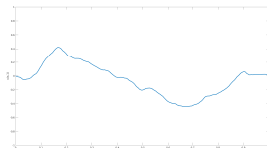


Figure: $z \mapsto u_N^{T,S}(z)$

Comportement du schéma d'Euler standard

Expérience numérique avec $\tau = 2^{-8}$:

Discrétisation spatiale: différences finies avec $h = 10^{-3}$.

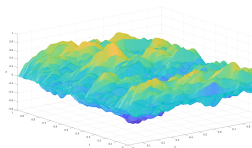


Figure:
 $(t_n, z) \mapsto u_n^{\tau,s}(z)$

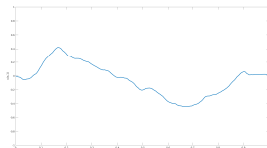


Figure: $z \mapsto u_N^{\tau,s}(z)$

Observation: la solution numérique est plus régulière que la solution exacte, pour toute valeur $\tau > 0$ du pas de temps.

Définition du schéma d'Euler modifié

SPDE/SEE:

$$du(t) = -\Lambda u(t)dt + F(u(t))dt + dW(t)$$

Schéma d'Euler standard:

$$u_{n+1}^{\tau, S} = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^{\tau, S} + \tau F(u_n^{\tau, S}) + \sqrt{\tau} \Gamma_n \right).$$

Définition du schéma d'Euler modifié

SPDE/SEE:

$$du(t) = -\Lambda u(t)dt + F(u(t))dt + dW(t)$$

Schéma d'Euler standard:

$$u_{n+1}^{\tau, s} = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^{\tau, s} + \tau F(u_n^{\tau, s}) + \sqrt{\tau} \Gamma_n \right).$$

Le schéma d'Euler modifié:

$$u_{n+1}^\tau = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^\tau + \tau F(u_n^\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,1} \right) + \mathcal{B}_\tau \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,2}$$

Définition du schéma d'Euler modifié

SPDE/SEE:

$$du(t) = -\Lambda u(t)dt + F(u(t))dt + dW(t)$$

Schéma d'Euler standard:

$$u_{n+1}^{\tau,s} = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^{\tau,s} + \tau F(u_n^{\tau,s}) + \sqrt{\tau} \Gamma_n \right).$$

Le schéma d'Euler modifié:

$$u_{n+1}^\tau = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^\tau + \tau F(u_n^\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,1} \right) + \mathcal{B}_\tau \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,2}$$

avec deux familles indépendantes $(\Gamma_{n,1})_{n \geq 0}$ et $(\Gamma_{n,2})_{n \geq 0}$, et un opérateur $\mathcal{B}_\tau \neq \mathcal{A}_\tau$, vérifiant

$$\mathcal{B}_\tau \mathcal{B}_\tau^* = \mathcal{A}_\tau.$$

\mathcal{B}_τ peut être calculé par une décomposition de Cholesky.

Expérience numérique: modifié vs standard

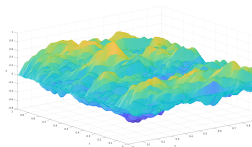


Figure:

$$(t_n, z) \mapsto u_n^{T,S}(z),$$

schéma d'Euler

standard

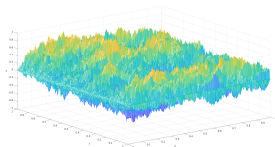


Figure:

$$(t_n, z) \mapsto u_n^T(z),$$

schéma d'Euler

modifié

Expérience numérique: modifié vs standard

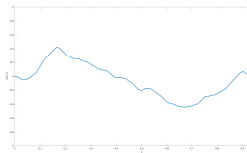


Figure: $z \mapsto u_N^{\tau, S}(z)$,
schéma d'Euler
standard

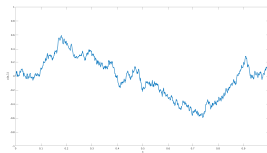


Figure: $z \mapsto u_N^{\tau}(z)$,
schéma d'Euler
modifié

Résultats principaux

- Comportement qualitatif: la régularité (spatiale) de la solution est préservée par le schéma d'Euler modifié, quel que soit $\tau > 0$.

Résultats principaux

- Comportement qualitatif: la régularité (spatiale) de la solution est préservée par le schéma d'Euler modifié, quel que soit $\tau > 0$.
- Distribution invariante: si $F = 0$, la distribution invariante Gaussienne $\nu = \mathcal{N}(0, \frac{\Lambda^{-1}}{2})$ (loi d'un pont Brownien) est préservée par le schéma d'Euler modifié, quel que soit $\tau > 0$.

Résultats principaux

- Comportement qualitatif: la régularité (spatiale) de la solution est préservée par le schéma d'Euler modifié, quel que soit $\tau > 0$.
- Distribution invariante: si $F = 0$, la distribution invariante Gaussienne $\nu = \mathcal{N}(0, \frac{\Lambda^{-1}}{2})$ (loi d'un pont Brownien) est préservée par le schéma d'Euler modifié, quel que soit $\tau > 0$.
- Estimation d'erreur faible: si $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}_b^2 , alors

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \mathbb{E}[\varphi(u_N^\tau)]| \lesssim \tau^{2\alpha},$$

pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$.

Distributions invariantes

En supposant que $\text{Lip}(F) < \lambda_1$: il existe une unique distribution (mesure de probabilités) invariante μ :

si $u(0) \sim \mu$ alors $u(t) \sim \mu$ pour tout $t \geq 0$.

Distributions invariantes

En supposant que $\text{Lip}(F) < \lambda_1$: il existe une unique distribution (mesure de probabilités) invariante μ :

si $u(0) \sim \mu$ alors $u(t) \sim \mu$ pour tout $t \geq 0$.

De plus, on a convergence en loi exponentielle vers μ :

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \int \varphi d\mu| \lesssim_{\varphi} e^{-\gamma T} (1 + \|u_0\|),$$

si $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitzienne.

Distributions invariantes

En supposant que $\text{Lip}(F) < \lambda_1$: il existe une unique distribution (mesure de probabilités) invariante μ :

si $u(0) \sim \mu$ alors $u(t) \sim \mu$ pour tout $t \geq 0$.

De plus, on a convergence en loi exponentielle vers μ :

$$|\mathbb{E}[\varphi(u(T))] - \int \varphi d\mu| \lesssim_{\varphi} e^{-\gamma T} (1 + \|u_0\|),$$

si $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitzienne.

Si $F = 0$, $\mu = \nu = \mathcal{N}(0, \frac{\Lambda^{-1}}{2})$ est une distribution Gaussienne.
 $\xi \sim \nu = \mathcal{N}(0, \frac{\Lambda^{-1}}{2})$ if $\xi = \sum_{j \geq 1} \frac{\xi_j}{\sqrt{2\lambda_j}} e_j$, avec $\xi_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d.

Distributions invariantes

Pour un système de type **gradient**: $F = -\nabla V$, la distribution invariante est une **mesure de Gibbs**

$$d\mu_{\star}(u) = Z^{-1} e^{-2V(u)} d\nu(u)$$

par rapport à la **distribution Gaussienne** ν .

Distributions invariantes

Pour un système de type **gradient**: $F = -\nabla V$, la distribution invariante est une **mesure de Gibbs**

$$d\mu_{\star}(u) = Z^{-1} e^{-2V(u)} d\nu(u)$$

par rapport à la **distribution Gaussienne** ν .

Pour tout $\tau > 0$, les schémas d'Euler standard et modifié admettent une unique distribution invariante μ^{τ} .

Résultats de convergence: pour tout $\alpha \in (0, 1/4)$

$$\left| \int \varphi d\mu^{\tau} - \int \varphi d\mu \right| \lesssim_{\alpha} \|\varphi\|_2 \tau^{2\alpha}.$$

si $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}_b^2 .

Distributions invariantes – schéma d'Euler standard

On suppose $F = 0$.

La distribution invariante $\mu^\tau = \nu^\tau$ du schéma d'Euler standard est la loi de

$$\sum_{j \geq 1} \sqrt{q_j^\tau} \xi_n e_n$$

où

$$q_j^\tau = \frac{1}{2\lambda_j} \frac{2}{2 + \lambda_j \tau} \neq q_j.$$

Les mesures de probabilités Gaussiennes ν et ν^τ sont singulières.

Cela reflète le fait que la régularité spatiale n'est pas préservée par le schéma d'Euler standard.

Distributions invariantes– schéma d'Euler modifié

Théorème

Soit μ^τ la distribution invariante du schéma d'Euler modifié.

Pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, on a

$$d_{\text{TV}}(\mu^\tau, \mu_\star) \lesssim_\alpha \tau^{2\alpha},$$

où d_{TV} est la distance en variation totale:

$$d_{\text{TV}}(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_b^0(H, \mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1} \left| \int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2 \right|.$$

Distributions invariantes– schéma d'Euler modifié

Théorème

Soit μ^τ la distribution invariante du schéma d'Euler modifié.

Pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, on a

$$d_{\text{TV}}(\mu^\tau, \mu_\star) \lesssim_\alpha \tau^{2\alpha},$$

où d_{TV} est la distance en variation totale:

$$d_{\text{TV}}(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\varphi \in \mathcal{B}_b^0(H, \mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \leq 1} \left| \int \varphi d\mu_1 - \int \varphi d\mu_2 \right|.$$

Cela permet de calculer une valeur approchée de $\int \varphi d\mu$ si $\varphi = \mathbb{1}_A$.
Cela n'est pas possible pour le schéma d'Euler standard.

Une observation clé pour la preuve

Le schéma d'Euler modifié

$$u_{n+1}^\tau = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^\tau + \tau F(u_n^\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,1} \right) + \mathcal{B}_\tau \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,2}$$

peut s'écrire

$$u_{\tau,n+1} = e^{-\tau \Lambda_\tau} u_{\tau,n} + \Lambda_\tau^{-1} (I - e^{-\tau \Lambda_\tau}) Q_\tau F(u_{\tau,n}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda_\tau} Q_\tau^{\frac{1}{2}} dW(s).$$

Une observation clé pour la preuve

Le schéma d'Euler modifié

$$u_{n+1}^\tau = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^\tau + \tau F(u_n^\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,1} \right) + \mathcal{B}_\tau \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,2}$$

peut s'écrire

$$u_{\tau,n+1} = e^{-\tau \Lambda_\tau} u_{\tau,n} + \Lambda_\tau^{-1} (I - e^{-\tau \Lambda_\tau}) Q_\tau F(u_{\tau,n}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda_\tau} Q_\tau^{\frac{1}{2}} dW(s).$$

Il s'agit du schéma d'Euler exponentiel accéléré pour l'équation modifiée

$$du_\tau(t) = -\Lambda_\tau u_\tau(t) dt + Q_\tau F(u_\tau(t)) dt + Q_\tau^{\frac{1}{2}} dW(t).$$

Une observation clé pour la preuve

Le schéma d'Euler modifié

$$u_{n+1}^\tau = \mathcal{A}_\tau \left(u_n^\tau + \tau F(u_n^\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,1} \right) + \mathcal{B}_\tau \sqrt{\frac{\tau}{2}} \Gamma_{n,2}$$

peut s'écrire

$$u_{\tau,n+1} = e^{-\tau \Lambda_\tau} u_{\tau,n} + \Lambda_\tau^{-1} (I - e^{-\tau \Lambda_\tau}) Q_\tau F(u_{\tau,n}) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-(t_{n+1}-s)\Lambda_\tau} Q_\tau^{\frac{1}{2}} dW(s).$$

Il s'agit du schéma d'Euler exponentiel accéléré pour l'équation modifiée

$$du_\tau(t) = -\Lambda_\tau u_\tau(t) dt + Q_\tau F(u_\tau(t)) dt + Q_\tau^{\frac{1}{2}} dW(t).$$

L'équation modifiée préserve la mesure de Gibbs μ_\star si $F = -DV$.

Plan

Un schéma de splitting préservant la positivité

Un schéma d'Euler modifié préservant la régularité

Un schéma préservant l'asymptotique

Conclusion

Système d'EDPS multi-échelles

Système avec composantes lente u^ϵ et rapide v^ϵ :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon(t, x) = \partial_x^2 u^\epsilon(t, x) + f(u^\epsilon(t, x), v^\epsilon(t, x)), \\ \partial_t v^\epsilon(t, x) = \frac{1}{\epsilon} \partial_x^2 v^\epsilon(t, x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \dot{W}(t, x), \end{cases}$$

où ϵ est le paramètre de séparation des échelles de temps.

Valeurs initiales: $u^\epsilon(0, x) = u_0(x)$, $v^\epsilon(0, x) = v_0(x)$.

Conditions au bord de Dirichlet homogènes en $x = 0, 1$.

Système d'EDPS multi-échelles

Système avec composantes lente u^ϵ et rapide v^ϵ :

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon(t, x) = \partial_x^2 u^\epsilon(t, x) + f(u^\epsilon(t, x), v^\epsilon(t, x)), \\ \partial_t v^\epsilon(t, x) = \frac{1}{\epsilon} \partial_x^2 v^\epsilon(t, x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} \dot{W}(t, x), \end{cases}$$

où ϵ est le paramètre de séparation des échelles de temps.

Valeurs initiales: $u^\epsilon(0, x) = u_0(x)$, $v^\epsilon(0, x) = v_0(x)$.

Conditions au bord de Dirichlet homogènes en $x = 0, 1$.

Comme système d'évolution stochastique:

$$\begin{cases} du^\epsilon(t) = -\Lambda u^\epsilon(t) dt + F(u^\epsilon(t), v^\epsilon(t)) dt, \\ dv^\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon} \Lambda v^\epsilon(t) dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}} dW(t). \end{cases}$$

Le principe de moyennisation

Changement d'échelle de temps: $v^\epsilon(t) = v(t/\epsilon)$ avec

$$dv(s) = -\Lambda v(s)ds + \sqrt{2}dW(s).$$

Comportement asymptotique de v : $v(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \nu = \mathcal{N}(0, \Lambda^{-1})$.

Le principe de moyennisation

Changement d'échelle de temps: $v^\epsilon(t) = v(t/\epsilon)$ avec

$$dv(s) = -\Lambda v(s)ds + \sqrt{2}dW(s).$$

Comportement asymptotique de v : $v(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \nu = \mathcal{N}(0, \Lambda^{-1})$.

La composante lente u^ϵ converge quand $\epsilon \rightarrow 0$ vers la solution \bar{u} de l'équation moyennée

$$\begin{cases} d\bar{u}(t) = -\Lambda\bar{u}(t)dt + \bar{F}(\bar{u}(t))dt, \\ \bar{u}(0) = u_0, \end{cases}$$

où \bar{F} est définie par

$$\bar{F}(u) = \int_H F(u, v) d\nu(v) = \mathbb{E}\left[F\left(u, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\xi_j}}{\sqrt{\lambda_j}} e_j\right)\right].$$

Schéma semi-implicite standard

On peut approcher la solution du système multi-échelle

$$\begin{cases} du^\epsilon(t) = -\Lambda u^\epsilon(t)dt + F(u^\epsilon(t), v^\epsilon(t))dt, \\ dv^\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon}\Lambda v^\epsilon(t)dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}}dW(t). \end{cases}$$

en utilisant le schéma d'Euler semi-implicite

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \tau\Lambda)^{-1} \left(u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau}) \right) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \left(I + \frac{\tau}{\epsilon}\Lambda \right)^{-1} \left(v_n^{\epsilon, \tau} + \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{\epsilon}}\Gamma_n \right). \end{cases}$$

où $\Gamma_n = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{n,j} e_j$, avec $\xi_{n,j} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d.

Schéma semi-implicite standard

Expérience numérique:

$$F(u, v) = 10e^{-0.5u^2} (e^{-0.1v^2} - 1) + 20u.$$

$$u_0(x) = \sin(2\pi x), \quad v_0(x) = 0. \quad T = 0.5. \quad h = 10^{-2}.$$

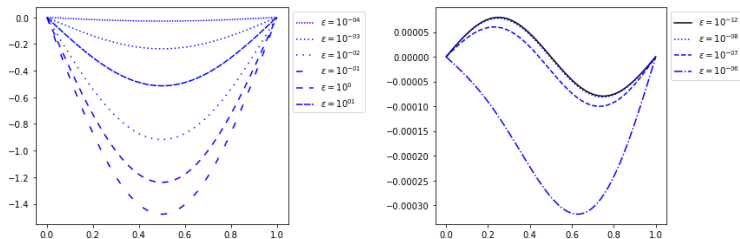


Figure: Convergence quand $\epsilon \rightarrow 0$ de la solution numérique $u_N^{\epsilon, \Delta t}$ pour le schéma semi-implicite, avec $\tau = 2^{-10}$.

Schéma semi-implicite standard

Estimations d'erreur faible: convergence quand $\tau = T/N \rightarrow 0$ de

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(N\tau))]|$$

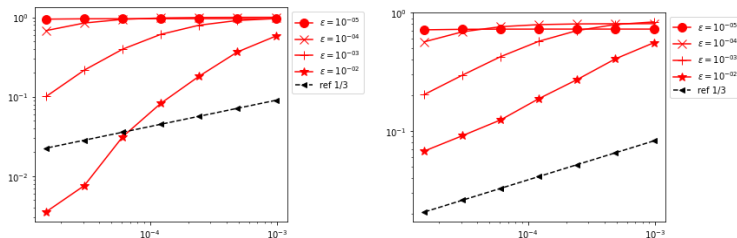


Figure: Convergence de l'erreur faible pour le schéma standard quand $\tau \rightarrow 0$, pour les fonctions tests φ_1 (gauche) et φ_2 (droite) pour différentes valeurs du paramètre ϵ .

Fonctions tests:

$$\varphi_1(u) = \sin\left(\int_0^1 u(x)^2 dx\right), \quad \varphi_2(u) = \sin\left(\int_0^1 u(x) dx\right)^2.$$

Schéma semi-implicite basique

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \frac{\tau}{\epsilon} \Lambda)^{-1} (v_n^{\epsilon, \tau} + \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{\epsilon}} \Gamma_n). \end{cases}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, $u_n^{\epsilon, \tau} \rightarrow u_n^\tau$ donné par

$$u_{n+1}^{0, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{0, \tau} + \tau F(u_n^{0, \tau}, 0)).$$

Schéma semi-implicite basique

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \frac{\tau}{\epsilon} \Lambda)^{-1} (v_n^{\epsilon, \tau} + \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{\epsilon}} \Gamma_n). \end{cases}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, $u_n^{\epsilon, \tau} \rightarrow u_n^\tau$ donné par

$$u_{n+1}^{0, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{0, \tau} + \tau F(u_n^{0, \tau}, 0)).$$

En général $\bar{F}(u) \neq F(u, 0)$.

Dans les expériences numériques: $F(u, 0) = 20u$.

Le schéma limite est associé à l'équation

$$\partial_t u(t) = -\Lambda u(t) + F(u(t), 0).$$

Schéma semi-implicite basique

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} \left(u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau}) \right) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \left(I + \frac{\tau}{\epsilon} \Lambda \right)^{-1} \left(v_n^{\epsilon, \tau} + \frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{\epsilon}} \Gamma_n \right). \end{cases}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, $u_n^{\epsilon, \tau} \rightarrow u_n^\tau$ donné par

$$u_{n+1}^{0, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} \left(u_n^{0, \tau} + \tau F(u_n^{0, \tau}, 0) \right).$$

En général $\overline{F}(u) \neq F(u, 0)$.

Dans les expériences numériques: $F(u, 0) = 20u$.

Le schéma limite est associé à l'équation

$$\partial_t u(t) = -\Lambda u(t) + F(u(t), 0).$$

Les limites $\epsilon \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow 0$ ne commutent pas.

Schémas préservant l'asymptotique

Un schéma numérique préserve l'asymptotique si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau}.$$

Schémas préservant l'asymptotique

Un schéma numérique **préserve** l'asymptotique si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau}.$$

On considère la convergence **en loi**: si $\varphi \in \mathcal{C}_b^0(H; \mathbb{R})$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \Delta t})] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \Delta t})].$$

Schémas préservant l'asymptotique

Un schéma numérique préserve l'asymptotique si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_N^{\epsilon, \tau}.$$

On considère la convergence en loi: si $\varphi \in \mathcal{C}_b^0(H; \mathbb{R})$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \Delta t})] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \Delta t})].$$

Autrement dit: le diagramme

$$\begin{array}{ccc} u_N^{\epsilon, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & u^\epsilon(T) \\ \downarrow \epsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \epsilon \rightarrow 0 \\ u_N^{0, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & \bar{u}(T) \end{array}$$

est commutatif.

Un schéma préservant l'asymptotique

Il faut discrétiser différemment la composante rapide v^ϵ . Une solution: utiliser le schéma d'Euler modifié.

Un schéma préservant l'asymptotique

Il faut discrétiser différemment la composante rapide v^ϵ . Une solution: utiliser le schéma d'Euler modifié.

Schéma proposé:

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon,\tau} = \mathcal{A}_\tau(u_n^{\epsilon,\tau} + \tau F(u_n^{\epsilon,\tau}, v_{n+1}^{\epsilon,\tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon,\tau} = \mathcal{A}_{\frac{\tau}{\epsilon}} v_n^{\epsilon,\tau} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon},1} \Gamma_{n,1} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon},2} \Gamma_{n,2}, \end{cases}$$

où les opérateurs vérifient les conditions

$$\mathcal{A}_\tau = (I + \tau\Lambda)^{-1}, \quad \mathcal{B}_{\tau,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + \tau\Lambda)^{-1}, \quad \mathcal{B}_{\tau,2}\mathcal{B}_{\tau,2}^* = \frac{1}{2}(I + \tau\Lambda)^{-1}$$

Un schéma préservant l'asymptotique

Il faut discrétiser différemment la composante rapide v^ϵ . Une solution: utiliser le **schéma d'Euler modifié**.

Schéma proposé:

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon,\tau} = \mathcal{A}_\tau(u_n^{\epsilon,\tau} + \tau F(u_n^{\epsilon,\tau}, v_{n+1}^{\epsilon,\tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon,\tau} = \mathcal{A}_{\frac{\tau}{\epsilon}} v_n^{\epsilon,\tau} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon},1} \Gamma_{n,1} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon},2} \Gamma_{n,2}, \end{cases}$$

où les opérateurs vérifient les conditions

$$\mathcal{A}_\tau = (I + \tau \Lambda)^{-1}, \quad \mathcal{B}_{\tau,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (I + \tau \Lambda)^{-1}, \quad \mathcal{B}_{\tau,2} \mathcal{B}_{\tau,2}^* = \frac{1}{2} (I + \tau \Lambda)^{-1}$$

Ce schéma préserve l'asymptotique.

Un schéma préservant l'asymptotique

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \mathcal{A}_\tau(u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \mathcal{A}_{\frac{\tau}{\epsilon}} v_n^{\epsilon, \tau} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon}, 1} \Gamma_{n,1} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon}, 2} \Gamma_{n,2}, \end{cases}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$:

- ▶ $v_{n+1}^{\epsilon, \tau} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{n,2}$
- ▶ $u_{n+1}^{\epsilon, \tau} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u_{n+1}^{0, \tau}$ donné par le schéma limite

$$u_{n+1}^{0, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{0, \tau} + \tau F(u_n^{0, \tau}, \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{n,2})).$$

Un schéma préservant l'asymptotique

$$\begin{cases} u_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \mathcal{A}_\tau(u_n^{\epsilon, \tau} + \tau F(u_n^{\epsilon, \tau}, v_{n+1}^{\epsilon, \tau})) \\ v_{n+1}^{\epsilon, \tau} = \mathcal{A}_\tau^\epsilon v_n^{\epsilon, \tau} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon}, 1} \Gamma_{n,1} + \sqrt{\frac{2\tau}{\epsilon}} \mathcal{B}_{\frac{\tau}{\epsilon}, 2} \Gamma_{n,2}, \end{cases}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$:

- ▶ $v_{n+1}^{\epsilon, \tau} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{n,2}$
- ▶ $u_{n+1}^{\epsilon, \tau} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u_{n+1}^{0, \tau}$ donné par le schéma limite

$$u_{n+1}^{0, \tau} = (I + \tau \Lambda)^{-1} (u_n^{0, \tau} + \tau F(u_n^{0, \tau}, \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{n,2})).$$

Le schéma limite est consistant avec l'équation moyennée:

$u_N^{0, \tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \bar{u}(N\tau)$, en utilisant

$$\mathbb{E}[F(u_n^{0, \tau}, \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{n,2}) | u_n^{0, \tau}] = \bar{F}(u_n^{0, \tau}).$$

Illustration numérique

Expérience numérique:

$$F(u, v) = 10e^{-0.5u^2} (e^{-0.1v^2} - 1) + 20u.$$

$$u_0(x) = \sin(2\pi x), \quad v_0(x) = 0. \quad T = 0.5. \quad h = 10^{-2}.$$

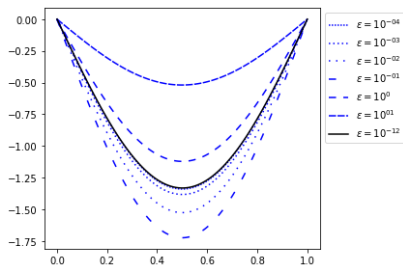


Figure: Convergence quand $\epsilon \rightarrow 0$ de la solution $u_N^{\epsilon, \Delta t}$ du schéma AP, avec $\Delta t = 2^{-10}$.

Courbes de convergence (1)

Estimations d'erreur faible: convergence quand $\tau = T/N \rightarrow 0$ de

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(N\tau))]|$$

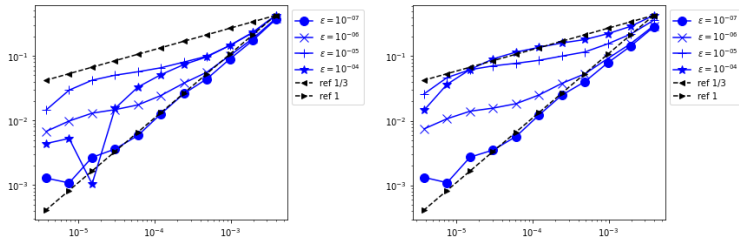


Figure: Convergence de l'erreur faible pour le schéma AP quand $\tau \rightarrow 0$, pour les fonctions tests φ_1 (gauche) et φ_2 (droite) pour différentes valeurs du paramètre $\epsilon \in \{10^{-4}, \dots, 10^{-7}\}$.

Fonctions tests:

$$\varphi_1(u) = \sin\left(\int_0^1 u(x)^2 dx\right), \quad \varphi_2(u) = \sin\left(\int_0^1 u(x) dx\right)^2.$$

Courbes de convergence (2)

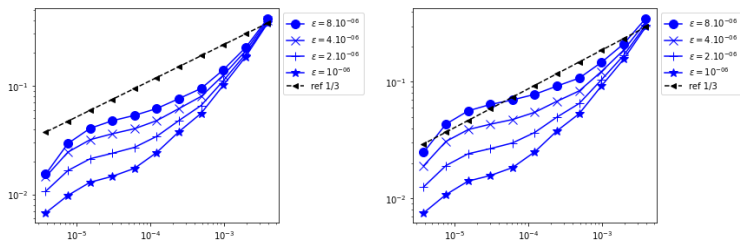


Figure: Convergence de l'erreur faible pour le schéma AP quand $\tau \rightarrow 0$, pour les fonctions tests φ_1 (gauche) et φ_2 (droite) pour différentes valeurs du paramètre $\epsilon \in \{10^{-6}, 2 \cdot 10^{-6}, 4 \cdot 10^{-6}, 8 \cdot 10^{-6}\}$.

Estimations d'erreur faible uniformes

Théorème

Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^3 .

Pour tout $\kappa \in (0, \frac{1}{3})$, on a les estimations d'erreur faible

$$\sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]| \lesssim_{\kappa, T, \varphi, u_0} \tau^{\frac{1}{3} - \kappa}$$

avec *ordre 1/3* par rapport à τ , *uniformément* par rapport à ϵ .

Estimations d'erreur faible uniformes

Théorème

Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^3 .

Pour tout $\kappa \in (0, \frac{1}{3})$, on a les estimations d'erreur faible

$$\sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]| \lesssim_{\kappa, T, \varphi, u_0} \tau^{\frac{1}{3} - \kappa}$$

avec *ordre 1/3* par rapport à τ , *uniformément* par rapport à ϵ .

Commentaires:

- ▶ quand $\epsilon \rightarrow 0$, le résultat est sous-optimal

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^\tau)] - \varphi(\bar{u}(T))| \lesssim_{\kappa, T, \varphi, x_0} \tau^{\frac{1}{3} - \kappa},$$

au lieu de l'ordre 1

Estimations d'erreur faible uniformes

Théorème

Soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}_b^3 .

Pour tout $\kappa \in (0, \frac{1}{3})$, on a les estimations d'erreur faible

$$\sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]| \lesssim_{\kappa, T, \varphi, u_0} \tau^{\frac{1}{3} - \kappa}$$

avec *ordre 1/3* par rapport à τ , *uniformément* par rapport à ϵ .

Commentaires:

- ▶ quand $\epsilon \rightarrow 0$, le résultat est sous-optimal

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^\tau)] - \varphi(\bar{u}(T))| \lesssim_{\kappa, T, \varphi, x_0} \tau^{\frac{1}{3} - \kappa},$$

au lieu de l'ordre 1

- ▶ mais les expériences numériques suggèrent l'optimalité de l'ordre 1/3 pour des bornes uniformes.

Stratégie de la preuve

On rappelle le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} u_N^{\epsilon, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & u^\epsilon(T) \\ \downarrow \epsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \epsilon \rightarrow 0 \\ u_N^{0, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & \bar{u}(T) \end{array}$$

Stratégie de la preuve

On rappelle le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} u_N^{\epsilon, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & u^\epsilon(T) \\ \downarrow \epsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \epsilon \rightarrow 0 \\ u_N^{0, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & \bar{u}(T) \end{array}$$

qui inspire deux stratégies:

Stratégie de la preuve

On rappelle le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} u_N^{\epsilon, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & u^\epsilon(T) \\ \downarrow \epsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \epsilon \rightarrow 0 \\ u_N^{0, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & \bar{u}(T) \end{array}$$

qui inspire deux stratégies:

- ▶ étudier directement l'erreur faible

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]|$$

Stratégie de la preuve

On rappelle le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} u_N^{\epsilon, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & u^\epsilon(T) \\ \downarrow \epsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \epsilon \rightarrow 0 \\ u_N^{0, \tau} & \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} & \bar{u}(T) \end{array}$$

qui inspire deux stratégies:

- ▶ étudier directement l'erreur faible

$$|\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]|$$

- ▶ la décomposer en trois termes

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]| &\leq |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(u_N^{0, \tau})]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[\varphi(u_N^{0, \tau})] - \varphi(\bar{u}(T))| \\ &\quad + |\varphi(\bar{u}(T)) - \mathbb{E}[\varphi(u^\epsilon(T))]| \end{aligned}$$

Combinaison des estimations d'erreur auxiliaires

Pour simplifier: $\kappa = 0$.

Combinaison des estimations d'erreur auxiliaires

Pour simplifier: $\kappa = 0$.

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{u}_N^{\epsilon, \tau})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{u}^\epsilon(T))]| \\ & \leq \min\left(\left(\tau/\epsilon\right)^{\frac{1}{2}} + \tau/\epsilon, \epsilon + \tau\right). \end{aligned}$$

On traite deux cas:

- ▶ $\tau \leq \epsilon^3$: avec la première borne

$$\frac{\tau}{\epsilon} \leq \tau^{\frac{2}{3}} \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{\epsilon} \leq \tau^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \tau^{\frac{1}{3}},$$

- ▶ $\tau \geq \epsilon^3$: avec la deuxième borne

$$\epsilon + \tau \leq \tau^{\frac{1}{3}} + \tau \leq C\tau^{\frac{1}{3}}.$$

Plan

Un schéma de splitting préservant la positivité

Un schéma d'Euler modifié préservant la régularité

Un schéma préservant l'asymptotique

Conclusion

Conclusion

La discrétisation en temps d'équations **stochastiques** nécessite des techniques spécifiques pour assurer simultanément la **préservation de propriétés qualitatives** et la **convergence**.

Conclusion

La discrétisation en temps d'équations **stochastiques** nécessite des techniques spécifiques pour assurer simultanément la **préservation de propriétés qualitatives** et la **convergence**.

Perspectives: traiter d'autres exemples, au-delà des équations semilinéaires paraboliques.

Conclusion

La discrétisation en temps d'équations **stochastiques** nécessite des techniques spécifiques pour assurer simultanément la **préservation de propriétés qualitatives** et la **convergence**.

Perspectives: traiter d'autres exemples, au-delà des équations semilinéaires paraboliques.

Merci pour votre attention.

References



C.-E. Bréhier, D. Cohen & J. Ulander

Analysis of a positivity-preserving splitting scheme for some nonlinear stochastic heat equations.

ESAIM: M2AN, 2024.



C.-E. Bréhier.

Analysis of a modified regularity-preserving Euler scheme for parabolic semilinear SPDEs - total variation error bounds for the numerical approximation of the invariant distribution.

Foundations of Computational Mathematics, 2024.



C.-E. Bréhier.

Uniform weak error estimates for an asymptotic preserving scheme applied to a class of slow-fast parabolic semilinear SPDEs.

SMAI Journal of Computational Mathematics, 2024.