

Preuves assistées par ordinateur pour des EDPs sur R^n

Matthieu CADIOT, CMAP - Ecole Polytechnique

Dans cet exposé, nous présentons une méthode (voir [3]) basée sur les preuves par ordinateur pour démontrer l'existence de solutions localisées d'EDPs sur R^n . Les solutions localisées sont des fonctions qui tendent vers zéro à l'infini, et apparaissent naturellement sous la forme de motifs localisés ou d'ondes solitaires dans de nombreux modèles physiques. La méthode présentée est basée sur la construction numérique d'une solution approchée \bar{u} à support sur un cube de R^n en utilisant les séries de Fourier. En développant un argument de point fixe, basée sur le théorème de Newton-Kantorovich, nous sommes en mesure de prouver l'existence rigoureuse d'une solution u à l'EDP dans un voisinage de \bar{u} , et de montrer que u est localisée. Notre contribution principale est la construction d'un inverse de la linéarisation autour de \bar{u} , associé à des estimations rigoureuses de convergence vers le vrai inverse. Nous appliquons cette méthode à plusieurs exemples d'EDPs, notamment l'équation de Swift-Hohenberg [4] et les équations de Gray-Scott [2], ainsi qu'au modèle nonlocal de Whitham [1].

- [1] M. Cadiot. *Constructive proofs of existence and stability of solitary waves in the Whitham and capillary-gravity Whitham equations*. *Nonlinearity*, **38(3)**, 035021, 2025. doi :10.1088/1361-6544/adb5e8.
- [2] M. Cadiot, D. Blanco. *The 2D Gray-Scott system of equations : constructive proofs of existence of localized stationary patterns*. *Nonlinearity*, **38(4)**, 045016, 2025. doi :10.1088/1361-6544/adbcf0.
- [3] M. Cadiot, J.-P. Lessard, J.-C. Nave. *Rigorous computation of solutions of semilinear PDEs on unbounded domains via spectral methods*. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **23(3)**, 1966–2017, 2024. doi :10.1137/23M1607507.
- [4] M. Cadiot, J.-P. Lessard, J.-C. Nave. *Stationary non-radial localized patterns in the planar Swift-Hohenberg PDE : constructive proofs of existence*. *J. Differential Equations*, **414**, 555–608, 2025. doi :10.1016/j.jde.2024.09.015.