

Une approche de type preuve assistée par ordinateur pour l'étude du système DPCM

Antoine ZUREK, LMAC - Compiègne

Dans cet exposé, je m'intéresserai à l'étude d'un système parabolique unidimensionnel décrivant la corrosion d'un baril métallique en milieu aqueux. Ce modèle est appelé DPCM (*Diffusion Poisson Coupled Model*) et a été introduit afin d'étudier la viabilité d'une option de stockage des déchets nucléaires par enfouissement. D'un point de vue mathématique, le système est constitué d'équations de type convection-diffusion définies sur un domaine mobile et couplées entre elles par une équation de Poisson. Enfin, la définition du système est complétée par des conditions non-linéaires aux bords de type Robin (ainsi que par des conditions initiales).

Du fait des nombreux couplages, des non-linéarités ainsi que des interfaces mobiles du domaine de définition du système, l'étude théorique du DPCM est une question particulièrement délicate. En effet, la structure des équations ne nous a pas permis d'obtenir, par exemple, des estimations a priori permettant de justifier, au moins formellement, l'existence de solutions globales en temps. Cependant, de nombreux résultats numériques semblent indiquer que de telles solutions existent et mettent également en avant l'existence de solutions de type onde progressive. C'est ce type de solutions que je considérerai dans cet exposé.

Plus précisément, après avoir introduit le concept d'ondes progressives pour le DPCM, j'expliquerai comment la démarche introduite dans [2] nous a permis de montrer l'existence de ce type de solutions. Une fois l'existence de ces solutions établie, une question naturelle est alors de s'intéresser à leur stabilité. Cette question se révèle également délicate et nous a conduit, dans un travail récent, voir [1], à reprendre la technique de preuve d'existence de solutions stationnaires introduite dans [2], mais également à introduire une nouvelle méthode (toujours assistée par ordinateur) pour étudier la stabilité ou l'instabilité de ces solutions.

Les résultats présentés dans cet exposé ont été obtenus en collaboration avec Maxime Breden (CMAP), Matthieu Cadiot (CMAP) et Claire Chainais-Hillairet (Université de Lille).

- [1] M. Breden, M. Cadiot, A. Zurek. *Constructive existence proofs and stability of stationary solutions to parabolic pdes using gegenbauer polynomials*, 2026. Hal-05570965.
- [2] M. Breden, C. Chainais-Hillairet, A. Zurek. *Existence of traveling wave solutions for the diffusion poisson coupled model : a computer-assisted proof*. ESAIM : M2AN, **55**(4), 1669–1697, 2021. doi :10.1051/m2an/2021037.