Méthodes numériques de type spectral pour résoudre l'équation de Boltzmann

Thomas REY, Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné - Nice

Les méthodes spectrales constituent aujourd'hui l'une des approches déterministes les plus performantes pour la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, qui décrit l'évolution statistique d'un gaz raréfié hors équilibre. La principale difficulté numérique provient du terme de collision, opérateur intégral non linéaire défini dans un espace de grande dimension et particulièrement coûteux à évaluer. Les méthodes spectrales reposent sur l'idée de représenter la fonction de distribution par une combinaison de fonctions globales, typiquement des séries de Fourier ou des polynômes orthogonaux. Cette approximation permet d'obtenir une très grande précision lorsque la solution est régulière, avec une convergence dite *spectrale*, bien supérieure à celle des méthodes de différences finies classiques.
Dans le cadre de l'équation de Boltzmann homogène, les méthodes de Fourier–Galerkin ont joué un rôle central. Elles exploitent la structure convolutionnelle de l'opérateur de collision dans l'espace de Fourier, ce qui permet d'utiliser efficacement la transformée de Fourier rapide (FFT) et de réduire fortement le coût de calcul. Les travaux de Pareschi, Russo, Mouhot, Gamba (et plein d'autres) ont montré que ces approches peuvent atteindre une précision élevée tout en restant compétitives en temps de calcul.
Cependant, les méthodes spectrales classiques présentent certaines limitations importantes. En particulier, la troncature spectrale peut détruire les invariants physiques fondamentaux de l'équation de Boltzmann, comme la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Cette perte de conservation peut conduire à des comportements asymptotiques erronés sur les longues simulations. Des recherches récentes ont donc porté sur la construction de méthodes spectrales conservatives ou préservant les moments. Des méthodes de Fourier–Galerkin contraintes permettent notamment d'imposer explicitement la conservation des moments sans sacrifier la précision spectrale ni l'efficacité des algorithmes rapides.
Au-delà du cas homogène, ces méthodes sont aujourd'hui combinées avec des discrétisations avancées en espace physique, comme les schémas *discontinuous Galerkin* ou les méthodes *asymptotic-preserving*, afin de traiter des écoulements rares complexes en physique des plasmas, en aérodynamique spatiale ou en microfluidique. Nous tenterons dans cet exposé de faire un panorama récent de toutes ces méthodes, et décrirons des problèmes ouverts dans le domaine.

Contact : thomas.rey@univ-cotedazur.fr