Minimisation d'énergie pour des condensats de Bose-Einstein en rotation via un schéma volumes finis

Robin ROUSSEL, Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille

Dans cet exposé, nous considérons le problème de minimisation de l'énergie de Gross–Pitaevskii

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\mathcal{D}} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 - \Omega \overline{u} L_z u + \gamma |u|^4 \right) \mathrm{d}x, \tag{E}$$

sous la contrainte $\|u\|_{L^2(\mathcal{D})} = 1$, où $\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$, V est un potentiel confinant, $L_z = -i(x\partial_y - y\partial_x)$ est l'opérateur de moment angulaire, $\Omega \in \mathbb{R}$ est un paramètre de rotation, et $\gamma \geq 0$ décrit les interactions non linéaires d'un condensat de Bose–Einstein.
Après avoir introduit le modèle physique sous-jacent et présenté quelques propriétés mathématiques du modèle continu, nous nous intéresserons à une discrétisation de (E) par une méthode de type volumes finis. Nous commencerons par rappeler une discrétisation usuelle du Laplacien, avant de nous concentrer sur celle de l'opérateur L_z.
Nous énoncerons ensuite le théorème principal de notre contribution :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{M}_{h_n}$ une suite de maillages réguliers de diamètres h_n d'un domaine $\mathcal{D}$, avec $h_n \to 0$. Si u_n est un minimiseur de l'énergie discrétisée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2, à une sous-suite près, vers un minimiseur u_* de $\mathcal{E}$.*

Nous présenterons ensuite les idées principales de la preuve de ce résultat, avant d'illustrer celui-ci par des résultats numériques, permettant notamment de mettre en évidence la présence de vortex quantiques dans les minimiseurs de (E). Enfin, si le temps le permet, nous évoquerons le problème du calcul des minimiseurs discrets à l'aide d'une méthode de descente de gradient et donnerons un résultat de convergence locale.
Les travaux présentés dans cet exposé font l'objet d'un article en cours de rédaction par l'orateur en collaboration avec Quentin Chauleur et Guillaume Dujardin.

Contact : `robin.roussel@univ-lille.fr`