

## Écoulement dans un milieu poreux fracturé: analyse mathématique et numérique d'une formulation mixte

**Michel KERN**, Inria, Serena - Paris      **Géraldine PICHOT**, Inria, Serena - Paris  
**Daniel ZEGARRA VASQUEZ**, Univ. Paris-Saclay, CEA, SEMT - Gif-sur-Yvette

Les roches du sous-sol contiennent généralement de nombreuses fractures qui s'intersectent pour former un réseau complexe. Ces roches sont modélisées comme des milieux poreux fracturés. Nous considérons ici des fractures perméables, qui forment des canaux préférentiels par lesquels s'écoule la majeure partie de l'eau (seul fluide pris en compte dans ce travail). Les fractures sont caractérisées par la différence d'ordre de grandeur entre leurs dimensions longitudinales et transverses. Elles peuvent alors être représentées par des structures de co-dimension un dans un milieu tridimensionnel, au prix d'une modification des équations décrivant l'écoulement pour prendre en compte les échanges entre la matrice poreuse et les fractures. On obtient un système d'équations aux dérivées partielles couplées entre l'écoulement 3D dans la roche et 2D dans le réseau de fractures. Dans le modèle considéré ici la pression est continue à la traversée d'une fracture, et les échanges se traduisent par des sauts de flux à travers les fractures, ainsi qu'une condition de flux total nul le long des intersections.

Une formulation mixte du modèle présente l'intérêt de conserver localement la masse du fluide. L'analyse du modèle mathématique passe naturellement par la vérification d'une condition inf-sup. Une difficulté réside dans la prise en compte d'une norme couplant les vitesses dans la roche et dans la fracture, avec une faible régularité des fonctions qui oblige également à formuler la condition aux intersections de manière faible. Pour obtenir un résultat d'existence valable pour des géométries générales, la preuve doit considérer le domaine de manière globale. On s'appuie pour cela sur un résultat correspondant établi pour une formulation primale.

La discrétisation utilise des éléments de Raviart-Thomas-Nédélec. La vérification de la condition inf-sup discrète s'appuie sur un opérateur de Fortin, qui doit prendre en compte les conditions de flux total nul aux intersections entre les fractures. On obtient un résultat de convergence général, et au premier ordre sous des conditions de régularité. Une formulation hybride permet ensuite de se ramener à un système linéaire symétrique et défini positif, pour lequel les inconnues exprimant le couplage entre roche et fracture coïncident de manière naturelle.

La méthode est validée sur une solution analytique, et également sur à un jeu de données de référence issu de la littérature.

Les détails des preuves se trouvent dans [1] et [2]. On trouve également dans la thèse [2] des résultats de simulation dans des domaines poreux de grande taille, utilisant des méthodes avancées de décomposition de domaine nécessitant un recours au calcul haute performance (voir l'exposé de D. Zegarra Vasquez).

- [1] M. Kern, G. Pichot, D. Zegarra Vasquez. *Mathematical and numerical analysis of the mixed formulation of single phase flow in three-dimensional fractured porous media*, 2025. Prépublication, en révision pour SMAI J. Comp. Math.
- [2] D. Zegarra Vasquez. *Efficient numerical simulation of single-phase flow in three-dimensional fractured porous media*. Thèse de doctorat, Sorbonne Université, 2025.