

# Approximation de mesures multifractales par un système d'Ornstein-Uhlenbeck : convergence faible et application en turbulence lagrangienne.

Paul Maurer  
CERMICS, ENPC

La modélisation lagrangienne stochastique de la turbulence repose classiquement sur des EDS pour la vitesse d'une particule fluide. Un modèle de référence est le modèle de Langevin simplifié

$$dU_t = -\frac{1}{T_L}(U_t - \langle U \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dB_t,$$

où  $\langle U \rangle$  désigne la vitesse moyenne eulérienne locale,  $T_L$  le temps de corrélation lagrangien,  $C_0$  une constante universelle, et  $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$  le taux de dissipation d'énergie vu le long d'une trajectoire lagrangienne. L'un des enjeux majeurs est alors de choisir un modèle pour  $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$  capable de reproduire l'intermittence observée dans les écoulements turbulents pleinement développés.

Dans le cadre de la théorie de Kolmogorov raffinée, on modélise la dissipation par  $\varepsilon_t = \exp(V_t - \frac{1}{2}\mathbb{E}[V_t^2])$ , où  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien presque log-corrélé. Un tel processus peut être construit à partir du mouvement brownien fractionnaire de Riemann-Liouville en faisant tendre le paramètre de Hurst vers zéro. Cependant, ce processus est peu régulier et non markovien, ce qui rend sa simulation numérique complexe.

L'idée développée ici consiste à approximer ce processus gaussien par une somme pondérée de processus d'Ornstein-Uhlenbeck corrélés, via une approximation de son noyau de Volterra qui exploite son caractère complètement monotone. On obtient l'approximation du processus de dissipation de la forme  $\varepsilon_t^{(N)} = \exp(V_t^{(N)} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(V_t^{(N)})^2])$ , où  $V_t^{(N)} = \sum_{i=1}^N w_i Y_t^{(i)}$  et

$$dY_t^{(i)} = -x_i Y_t^{(i)} dt + dW_t, \quad i = 1, \dots, N.$$

Contrairement à d'autres approximations de mesures multifractales disponibles dans la littérature, cette méthode fournit un modèle fermé de dimension finie sous forme d'EDS couplées pour la vitesse lagrangienne.

Sur le plan théorique, nous étudions la sensibilité de ces modèles au choix du noyau de Volterra sous-jacent, et démontrons en particulier que pour des processus de Volterra  $V^{(K)}$  et  $V^{(\bar{K})}$  de noyaux respectifs  $K$  et  $\bar{K}$ , on a, pour une fonction test  $\phi$  suffisamment régulière,

$$\left| \mathbb{E} \left[ \phi \left( \int_0^T \exp \left( V_s^{(K)} - \frac{1}{2} \mathbb{E}[(V_s^{(K)})^2] \right) ds \right) \right] - \mathbb{E} \left[ \phi \left( \int_0^T \exp \left( V_s^{(\bar{K})} - \frac{1}{2} \mathbb{E}[(V_s^{(\bar{K})})^2] \right) ds \right) \right] \right| \leq C_T \|K - \bar{K}\|_{L^1([0, T])}.$$

En construisant une quadrature de Gauss bien choisie pour le noyau fractionnaire, on en déduit que la mesure aléatoire  $M^{(N)}(dt) = \exp(V_t^{(N)} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(V_t^{(N)})^2])dt$  a un comportement multifractal à la limite  $N \rightarrow \infty$ , avec une vitesse de convergence exponentielle. Ces résultats, détaillés dans la pré-publication [1], utilisent les récentes techniques de relèvement markovien et d'équation de Kolmogorov dépendant du chemin pour les processus de Volterra stochastiques, qui permettent une analyse précise de l'erreur faible.

## Références

- [1] M. Bossy, K. Martinez, P. Maurer. Weak rough kernel comparison via PPDEs for integrated Volterra processes. *arXiv :2501.07509*, 2025.