Schémas préservant la structure pour des équations aux dérivées partielles stochastiques

Charles-Edouard BRÉHIER, LMAP - Pau

On considère plusieurs exemples d'équations aux dérivées partielles stochastiques, dont les solutions ont des propriétés qualitatives importantes qui ne sont pas préservées par des schémas de discrétisation en temps classiques. On présentera des schémas originaux qui préservent la structure considérée, des résultats justifiant leur convergence, et des illustrations numériques.
Dans un premier temps, on s'intéressera à des équations aux dérivées partielles stochastiques du type

$$du(t,x) = \Delta u(t,x)dt + g(u(t,x))dW(t),$$

On présentera des schémas qui préservent l'intervalle $[-1,1]$ (si $g(1) = g(-1) = 0$) ou la positivité (si $g(0) = 0$). Ces schémas analysés dans [3, 4] sont basés sur des méthodes de splitting et l'analyse de schémas préservant l'intervalle associé pour des équations différentielles stochastiques scalaires.
Ensuite, on s'intéressera à des équations aux dérivées partielles stochastiques du type

$$du(t,x) = \Delta u(t,x)dt + f(u(t,x))dt + +dW(t,x),$$

dépendant d'un bruit-blanc espace-temps, et à la problématique de la préservation de la régularité spatiale des solutions. Un résultat d'approximation en variation totale de la distribution invariante du système pour un schéma d'Euler modifié [2] montrera l'importance de préserver la structure au-delà de l'aspect qualitatif.
Enfin, on présentera des schémas préservant l'asymptotique pour des systèmes multi-échelles du type

$$\begin{cases} \partial_t u^\epsilon(t,x) = \Delta u^\epsilon(t,x) + f(u^\epsilon(t,x), v^\epsilon(t,x)) \\ dv^\epsilon(t,x) = \frac{1}{\epsilon}\Delta v^\epsilon(t,x)dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dW(t,x) \end{cases}$$

dans le régime ϵ tendant vers 0. On montrera des estimations d'erreur faible d'ordre 1/3 par rapport au pas de temps uniformes en ϵ [1].

[1] C.-E. Bréhier. *Uniform weak error estimates for an asymptotic preserving scheme applied to a class of slow-fast parabolic semilinear SPDEs.* SMAI J. Comput. Math., **10**, 175–228, 2024. doi: 10.5802/smai-jcm.110.

[2] C.-E. Bréhier. *Analysis of a modified regularity-preserving Euler scheme for parabolic semilinear SPDEs: total variation error bounds for the numerical approximation of the invariant distribution.* Found. Comput. Math., **25(2)**, 511–586, 2025. doi:10.1007/s10208-024-09644-z.

[3] C.-E. Bréhier, D. Cohen, G. Custers. *An explicit domain preserving scheme for stochastic partial differential equations.* En préparation.

[4] C.-E. Bréhier, D. Cohen, J. Ulander. *Analysis of a positivity-preserving splitting scheme for some semilinear stochastic heat equations.* ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **58(4)**, 1317–1346, 2024. doi:10.1051/m2an/2024032.

Contact : `charles-edouard.brehier@univ-pau.fr`