

Compression Tenseur-Train d'opérateurs intégraux à noyau $r^{-\beta}$

Anthony TOROSYAN, G2Elab - Grenoble

Olivier CHADEBEC, G2Elab - Grenoble

Jean-Michel GUICHON, G2Elab - Grenoble

Gérard MEUNIER, G2Elab - Grenoble **Jean-René POIRIER**, Laplace - Toulouse

On s'intéresse dans ce résumé à la compression de matrices issues d'opérateurs intégraux. Ces opérateurs interviennent fréquemment dans la modélisation de phénomènes électromagnétiques où il est commun de rencontrer des problèmes sous la forme de systèmes intégro-différentiels à résoudre. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, lipschitzien, on considère la matrice $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $\mathcal{G}_{I,J} := (G(\psi_I), \psi_J)_{L^2(\mathcal{Q}_h)}$ où \mathcal{Q}_h est une partition de Ω et $(\psi_I)_{I=0}^{n-1}$ constitue une base polynomiale d'un certain espace discret S_h de dimension n . L'opérateur G sera supposé de la forme $G(\psi_I) := g * \psi_I$ où $*$ est la convolution, $\text{supp}(\psi_I) \subset \Omega$ et $g(x) := \sigma / \|x\|^\beta$, où $\sigma > 0$ dépend de D , $0 < \beta \leq D - 1$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. La matrice \mathcal{G} est dense, ainsi, la complexité de stockage est $\mathcal{O}(n^2)$. Il faut donc la compresser. Ici, on se propose d'étudier la compression à travers le paradigme de la tensorisation et de la représentation Tenseur-Train.

On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n := n_1 \dots n_d$, $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, avec $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. La tensorisation de \mathcal{G} est l'isomorphisme qui donne $\hat{\mathcal{G}} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{n_d \times n_d}$ (voir [4]). La représentation Tenseur-Train [4] de $\hat{\mathcal{G}}$ est ensuite donnée par $\hat{\mathcal{G}} = \sum_{k_0, \dots, k_d=1}^{r_0, \dots, r_d} \mathcal{G}_1^{k_0, k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{G}_d^{k_{d-1}, k_d}$, avec par convention $r_0 = r_d = 1$, $\mathcal{G}_l \in \mathbb{C}^{r_{l-1} \times n_l \times n_l \times r_l}$, $l \in \{1, \dots, d\}$, et $\{r_0, \dots, r_d\} \in \mathbb{N}^d$ sont les rangs. La complexité de la représentation est donnée par $\text{compl}(\hat{\mathcal{G}}) := \sum_{l=1}^d r_{l-1} n_l^2 r_l$. Si les rangs sont "petits" alors $\text{compl}(\hat{\mathcal{G}}) \ll n^2$.

Dans [5], une méthode numérique est construite pour calculer $\hat{\mathcal{G}}_\varepsilon$, l'approximation de $\hat{\mathcal{G}}$ pour une précision $\varepsilon > 0$. Cependant, elle ne permet pas de savoir a priori quelle compression on peut espérer en fonction de ε . C'est cette compréhension que nous voulons essayer d'apporter et qui revient au problème suivant :

Soit $\|\cdot\|$ une norme telle que $\|\hat{\mathcal{G}} - \hat{\mathcal{G}}_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, avec $\hat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ une approximation Tenseur-Train de $\hat{\mathcal{G}}$ et $\varepsilon > 0$, on cherche à borner $\text{compl}(\hat{\mathcal{G}}_\varepsilon)$ en fonction des données du problème.

On se restreindra au domaine $\Omega = [0, 1]^D$, et on construira $\hat{\mathcal{G}}_\varepsilon$ à partir d'une approximation g_ε du noyau g . Pour construire g_ε , on utilisera [3] pour approximer g en une somme de Gaussiennes et avec le paradigme développé dans [1], [2], nous en déduirons sa représentation Tenseur-Train dans un système de splines adapté.

- [1] M. Ali, A. Nouy. *Approximation theory of tree tensor networks : Tensorized univariate functions*. Constructive Approximation, **58(2)**, 463–544, 2023.
- [2] M. Ali, A. Nouy. *Approximation theory of tree tensor networks : Tensorized multivariate functions*. arXiv preprint arXiv :2101.11932, 2025.
- [3] G. Beylkin, L. Monzón. *Approximation by exponential sums revisited*. Applied and Computational Harmonic Analysis, **28(2)**, 131–149, 2010.
- [4] W. Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, vol. 42. Springer, 2012.
- [5] A. Torosyan, B. Bannwarth, O. Chadebec, J.-M. Guichon, G. Meunier, J.-R. Poirier. *Tensor-train compression of a volume integral eddy current problem in discontinuous galerkin*, 2026. Manuscrit soumis dans International Journal for Numerical Methods in Engineering. Disponible sur HAL : <https://hal.science/hal-05548273v1>.