Simulation numérique du mouvement d'un cylindre flottant dans le régime de Boussinesq

Geoffrey BECK, INRIA - Rennes **Ewan CONTENTIN**, IRMAR - Rennes
Ludovic MARTAUD, INRIA - Rennes

Nous étudions un cylindre de révolution, de rayon $R > 0$, de masse m, partiellement immergé dans un fluide, contraint à un mouvement vertical. Nous considérons les cas de dimension $d + 1$ où $d \in \{1, 2\}$ décrit la dimension du fluide, dans lequel il n'y a pas de vitesse azimutale. Cette situation donne lieu à une axisymétrie selon l'axe de révolution du cylindre. En particulier, le cas $d = 2$ se réécrit comme le cas $d = 1$ avec des composantes radiales sur $[0, +\infty)$. La différence entre la position du centre de masse du cylindre et sa position à l'équilibre est notée δ et satisfait le principe fondamental de la dynamique. Le comportement du fluide est décrit par le système d'équations de Boussinesq-Abbott linéaires, perturbation dispersive d'un système hyperbolique, où le paramètre dispersif $0 < \kappa < 1$ décrit la profondeur. La variable ζ décrit l'élévation de la hauteur du fluide.
Les domaines $[0, R)$ et $(R, +\infty)$ sont reliés par des conditions de transmission et nous avons montré dans [1] que le problème est équivalent à un problème sur $[R, +\infty)$ liant une EDP sur ζ sur $(R, +\infty)$ à une EDO en R sur $\lim_{r\to R^+}\zeta(r)$ et δ. En particulier, du fait de la dispersion, nous introduisons l'opérateur $\mathcal{R}\zeta$ défini comme la solution d'un problème elliptique dispersif prenant en argument ζ, et de condition de bord type Neumann homogène en $r = R$. Cette nouvelle formule dite *augmentée* permet de ramener l'intégralité du problème au calcul de ζ et de δ, couplés par le système d'équations :

$$\begin{cases} \kappa^2\partial_{tt}\zeta + \zeta = \mathcal{R}\zeta + K(r/\kappa)\ddot{\delta} & r \geq R, \quad t > 0, \\ \tilde{m}\ddot{\delta} = \underline{\mathcal{R}\zeta} - \delta, \quad \underline{\mathcal{R}\zeta} = \lim_{r\to R^+}\mathcal{R}\zeta(r) & t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où K se comporte comme une couche limite proche de R, et $\tilde{m} > m$ dépend de m, R, et κ. Ce système permet ensuite de reconstruire toutes les autres variables du problème.
L'étude de ce problème convient en particulier à la situation du retour à l'équilibre, consistant à lâcher le solide d'une hauteur initiale dans un fluide au repos. Dans ce cas nous montrons dans [1] que δ appartient à H^2 et décroit en particulier plus lentement que $t^{-1/2}$. De plus, dans ce cas, nous faisons une approche numérique du problème.
Pour simuler ce problème, la première étape de l'étude est la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{R}$, qui se fait par des méthodes de résolutions classiques de problèmes elliptiques. Cependant, la présence de κ introduit un problème d'échelle, et impose en particulier que $\Delta x \lesssim \kappa$. Nous calculons alors les mises à jour de ζ et δ grâce à une discrétisation temporelle de (1). Grâce à la discrétisation de $\mathcal{R}$, le rayon spectral de l'opérateur $Id - \mathcal{R}$ est strictement plus petit que 1, ce qui donne lieu à une CFL de type EDO $\Delta t \lesssim \kappa$. Bien que cette méthode soit avantageuse du point de vue des CFL ne liant pas Δt à Δx, cela rend les simulations pour des petites valeurs de κ coûteuses.
Pour outrepasser cet inconvénient nous considérons un schéma dit *spectral*, où nous appliquons la transformée de Fourier cos $\mathcal{F}_{\cos}$ au système (1). Ainsi nous pouvons obtenir $\mathcal{F}_{\cos}(\zeta)$ et δ en tout temps grâce à un schéma exponentiel en explicitant la donnée $\underline{\mathcal{R}\zeta} - \delta$ dans (1). Ce schéma est coûteux du fait du calcul de $\underline{\mathcal{R}\zeta}$, mais plus efficace, permettant de traiter κ très petit, avec peu d'approximation, et ne nécessite pas de discrétisation de l'espace.

[1] G.Beck, E.Contentin, L.Martaud. *Freely floating cylinder on a 3d fluid governed by the boussinesq equations in the axisymmetry without swirl case*, 2025.

Contact : `ewan.contentin@univ-rennes.fr`