

A unified perspective on PINNs and FEMs

Nilo SCHWENCKE, OCKHAM-LIP - ENS Lyon
Roland MAIER, IANM-KIT - Karlsruhe, Allemagne

English version : The goal of this contribution is to propose a unified functional-analytic framework for several classical and recent approaches to the numerical solution of partial differential equations. Building upon the theory of Gelfand triples, we develop a kernel-based formalism for weak formulations. This viewpoint naturally encompasses Galerkin methods, and in particular the finite element method, and provides a principled way to place them in the same geometric setting as least-squares approaches, including physics-informed neural networks (PINNs).

Building on this kernel perspective, we then introduce an algorithmic strategy that allows PINNs and FEM to operate collaboratively. We illustrate the benefits of this interaction on selected problems, showing how the proposed framework can leverage the respective strengths of both methodologies.

French version : L'objectif de cette contribution est de proposer un cadre d'analyse fonctionnel unifié pour différentes approches (classiques et plus récentes) traitant de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. En nous appuyant sur la théorie des triplets de Gelfand, nous développons un formalisme fondé sur les méthodes à noyaux pour les formulations faibles. Ce point de vue englobe naturellement les méthodes de Galerkin, et en particulier la méthode des éléments finis, et fournit une manière principielle de les situer dans le même cadre géométrique que les approches de type moindres carrés, y compris les réseaux de neurones informés par la physique (PINNs).

À partir de cette perspective, nous introduisons une stratégie algorithmique permettant aux PINNs et aux éléments finis de fonctionner de manière collaborative. Nous illustrons l'intérêt de cette interaction sur plusieurs problèmes choisis, en montrant comment le cadre proposé permet d'exploiter les forces respectives de ces deux méthodologies.