

## Stability of a serially connected piezoelectric-elastic systems with time delay

**Ahmad EL HAJJ**, LMAC - Compiègne - France  
**Batoul AL ACHAAL**, LMAC - Compiègne - France  
**Ali WEHBE**, KALMA - Hadath - Liban

Dans cet exposé, nous présentons des résultats concernant le comportement à long terme d'un système élasto-piézoélectrique intégrant à la fois un amortissement et un retard temporel localisé. Ce système est régi par des équations linéaires de type onde, qui permettent de modéliser l'interaction entre effets mécaniques et électriques, en présence de contact et de frottement. De telles modélisations sont essentielles dans de nombreuses applications industrielles, notamment dans les secteurs de l'automobile et de la nanotechnologie [1].

Nous considérons un milieu à trois couches, comprenant deux couches élastiques et une couche piézoélectrique avec amortissement et retard localisés. La dynamique de ce système est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases}
 u_{tt}(x, t) - c_1 u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, l_1) \times (0, +\infty), \\
 \rho v_{tt}(x, t) - \alpha v_{xx}(x, t) + \gamma \beta p_{xx}(x, t) + \mathbf{1}_{[a, b]}(x) (\kappa_1 v_t(x, t) + \kappa_2 v_t(x, t - \tau)) = 0, & (x, t) \in (l_1, l_2) \times (0, +\infty), \\
 \mu p_{tt}(x, t) - \beta p_{xx}(x, t) + \gamma \beta v_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (l_1, l_2) \times (0, +\infty), \\
 y_{tt}(x, t) - c_2 y_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (l_2, L) \times (0, +\infty),
 \end{cases} \quad (1)$$

avec les conditions aux bords, de transmission et de continuité suivantes :

$$\left. \begin{cases}
 u(0, t) = y(L, t) = 0, \\
 v(l_1, t) = u(l_1, t), \\
 v(l_2, t) = y(l_2, t), \\
 \alpha v_x(l_1, t) - \gamma \beta p_x(l_1, t) = c_1 u_x(l_1, t), \\
 \alpha v_x(l_2, t) - \gamma \beta p_x(l_2, t) = c_2 y_x(l_2, t), \\
 p_x(l_1, t) = \gamma v_x(l_1, t), \\
 p_x(l_2, t) = \gamma v_x(l_2, t),
 \end{cases} \right| \text{ pour tout } t \in (0, +\infty). \quad (2)$$

Le système (1)–(2) est complété par des conditions initiales (voir [2]).

En nous appuyant sur les théorèmes de Lax–Milgram et de Lumer–Phillips, nous établissons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution générée par un semi-groupe de contraction. Nous démontrons ensuite la stabilité forte de la solution grâce au théorème d'Arendt–Batty et quelques propriétés de l'opérateur associé. Par ailleurs, en exploitant ces propriétés et des outils de la théorie des semi-groupes, nous montrons que la solution est exponentiellement stable. Ces résultats fournissent ainsi un cadre rigoureux pour l'analyse de la stabilité des systèmes élasto-piézoélectrique avec retard. Plus précisément, nous obtenons :

**Théorème 1.** (voir [2]). *Si  $|\kappa_2| < \kappa_1$ , alors le système (1)–(2) admet une unique solution, générée par un  $C_0$ -semi-groupe de contractions exponentiellement stable.*

- [1] M. Akil, S. Nicaise, A. O. Ozer, V. Régner. *Stability results for novel serially-connected magnetizable piezoelectric and elastic smart-system designs*. Applied Mathematics & Optimization, **89**, 2024.
- [2] B. Al Achaal, A. El Hajj, A. Wehbe. *Stability of serially connected piezoelectric-elastic systems with time delay*. To appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2026.