

Solutions multiples et simulations pour un problème de charges d'espace appliqué aux lignes de transport d'électricité en HVDC.

Madeline Chauvier

Université Polytechnique Hauts-de-France
Université de Mons

Directeurs de thèse : Serge Nicaise, Christophe Troestler
Encadrants : Zuqi Tang, Juliette Venel
Expert du domaine : Stéphane Clénet



CANUM, 2 juin 2026

Table des matières

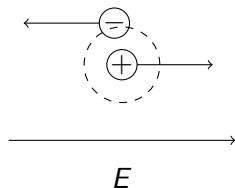
- 1 Contexte et modèle
- 2 Cas radial
- 3 Existence de solutions
- 4 Résultats numériques

Table des matières

- 1 Contexte et modèle
- 2 Cas radial
- 3 Existence de solutions
- 4 Résultats numériques

Phénomène d'ionisation

Le phénomène d'ionisation apparaît quand un atome perd un ou plusieurs électrons.



Ce phénomène induit :

- Des ions dans l'air autour du conducteur.
- L'effet couronne.
- Création de charges d'espace.

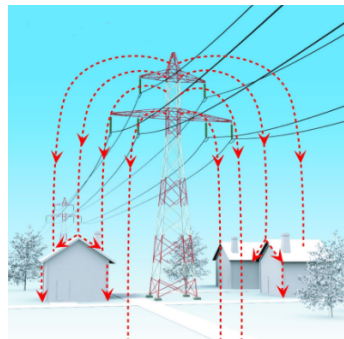


Table des matières

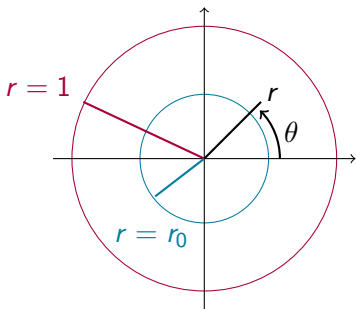
- 1 Contexte et modèle
- 2 Cas radial
- 3 Existence de solutions
- 4 Résultats numériques

Cas radial

Dans le cas radial (anneau), il y a existence et unicité d'une solution (φ, ρ) , pour $A \in \left[0, \frac{-1}{r_0 \ln(r_0)}\right]$ au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi(r) = -\rho(r), \\ \operatorname{div}(\rho(r)\nabla\varphi(r)) = 0, \\ \varphi(1) = 0, \\ \varphi(r_0) = 1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r_0) = -A, \end{array} \right.$$

pour $r \in B(0, 1) \setminus B(0, r_0)$ et $0 < r_0 < 1$.



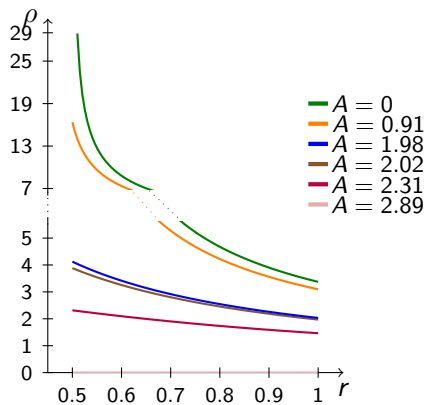
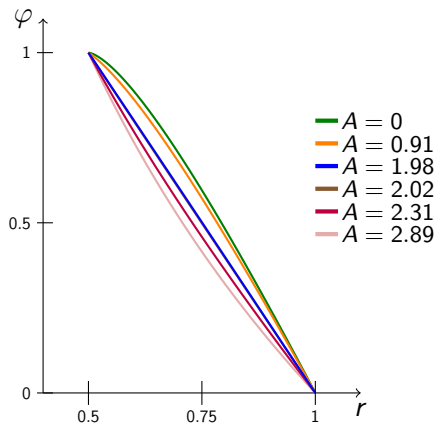
Solutions radiales pour $r_0 = 0.5$ 

Table des matières

- 1 Contexte et modèle
- 2 Cas radial
- 3 Existence de solutions
- 4 Résultats numériques

Ajout de diffusion

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x), & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\rho_\varepsilon(x) + \rho_\varepsilon(x)\nabla\varphi_\varepsilon(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi_\varepsilon(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_\varepsilon(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \\ \rho_\varepsilon(x) = \rho_c(x) & x \in \Gamma_c, \\ \rho_\varepsilon(x) = \rho_d(x) & x \in \Gamma_d, \end{array} \right. \quad (1)$$

avec $\rho_c \in H^{1/2}(\Gamma_c)$, $\rho_d \in H^{1/2}(\Gamma_d)$, $\rho_c, \rho_d \geq 0$.

Résultat principal

Soit $W := \{\rho \in L^2(\Omega) \mid 0 \leq \rho \leq K_+\}$ et $K_+ = \max\{\sup_{\Gamma_c} \rho_c, \sup_{\Gamma_d} \rho_d\}$.
On a le théorème suivant :

Théorème

Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (1) possède une solution $(\varphi_\varepsilon, \rho_\varepsilon) \in H^2(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap W)$. De plus, on a $\varphi_\varepsilon \in W^{2,q}(\Omega)$ pour chaque $q \geq 2$. Finalement, si $\rho_c \in W^{2-1/p,p}(\Gamma_c)$ et $\rho_d \in W^{2-1/p,p}(\Gamma_d)$ pour $p > 2$, alors $\rho \in W^{2,p}(\Omega)$.

Idée de la preuve

Pour résoudre ce système, on le divise en 2 sous-systèmes.

Idée de la preuve

Pour résoudre ce système, on le divise en 2 sous-systèmes. Soit $\rho_0 \in W$, on résout

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0(x) = \rho_0(x), & x \in \Omega, \\ \varphi_0(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_0(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

en φ_0 .

Idée de la preuve

Pour résoudre ce système, on le divise en 2 sous-systèmes. Soit $\rho_0 \in W$, on résout

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_0(x) = \rho_0(x), & x \in \Omega, \\ \varphi_0(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_0(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

en φ_0 . Ensuite, on résout

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\rho_1(x) + \rho_1(x)\nabla\varphi_0(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ \rho_1(x) = \rho_c(x) & x \in \Gamma_c, \\ \rho_1(x) = \rho_d(x) & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

en ρ_1 .

Idée de la preuve

Pour résoudre ce système, on le divise en 2 sous-systèmes. Soit $\rho_0 \in W$, on résout

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_0(x) = \rho_0(x), & x \in \Omega, \\ \varphi_0(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_0(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

en φ_0 . Ensuite, on résout

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \rho_1(x) + \rho_1(x) \nabla \varphi_0(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ \rho_1(x) = \rho_c(x) & x \in \Gamma_c, \\ \rho_1(x) = \rho_d(x) & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

en ρ_1 . On définit l'application G par $\rho_1 = G(\rho_0)$.

Idée de la preuve

Ensuite on montre :

1 $G : W \rightarrow W$.

Idée de la preuve

Ensuite on montre :

- 1 $G : W \rightarrow W$.
- 2 G est complètement continue.

Idée de la preuve

Ensuite on montre :

- 1 $G : W \rightarrow W$.
- 2 G est complètement continue.
- 3 G admet un point fixe grâce au théorème de Schauder.

Existence de solutions

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient l'existence de solutions $(\varphi, \rho) \in H^2(\Omega) \times W$, et $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $p > 2$, de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \rho(x), & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho(x)\nabla\varphi(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \Gamma_d. \end{cases}$$

Table des matières

- 1 Contexte et modèle
- 2 Cas radial
- 3 Existence de solutions
- 4 Résultats numériques

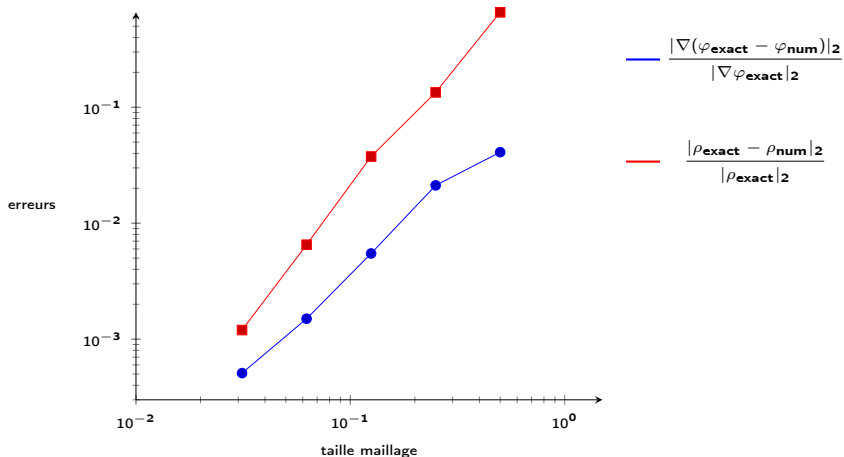
Algorithme des moindres carrés

Pour ρ fixé, on résout :

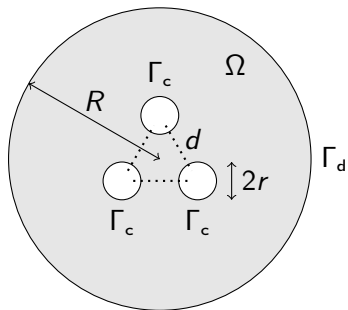
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\varphi_1(x) = \rho(x), & x \in \Omega, \\ \varphi_1(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}(x) = A, & x \in \Gamma_c, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\rho(x)\nabla\varphi_2(x)) = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi_2(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_2(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \end{array} \right.$$

Ensuite, on minimise la fonctionnelle $J(\rho) = |\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)|_2^2$.

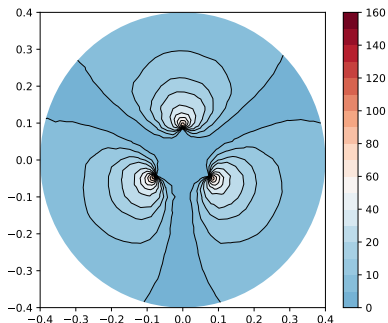
Convergence dans le cas radial vers la solution exacte



Comparaison avec l'expérimental

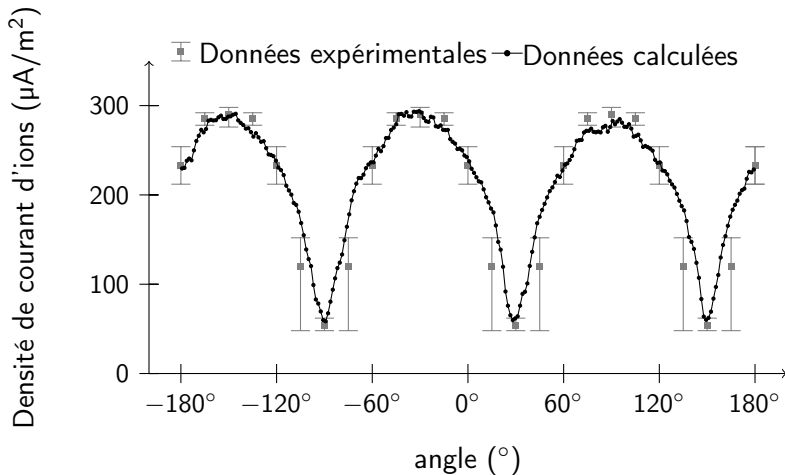


Domaine ($r = 1.5$ mm,
 $d = 14.8$ cm et $R = 0.4$ m)



Résultats numériques pour ρ .

Comparaison avec l'expérimental

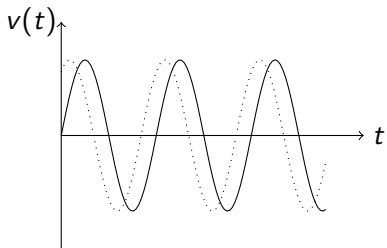


Merci pour votre attention !

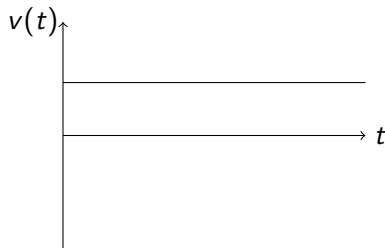


Deux types de courant

Il existe 2 types de courant : le courant alternatif et le courant continu.



Courant alternatif



Courant continu

Pertes d'énergies

- Pendant le transport d'électricité, il existe des pertes dues à l'effet Joule.
- Ces pertes sont converties en chaleur autour des câbles et donc ne peuvent pas être récupérées.
- La puissance des pertes est proportionnelles à rl^2 .
- Elles ne sont pas négligeables (quelques pourcentages de l'énergie transportée).

Transport d'électricité avec du courant alternatif

De nos jours, on utilise principalement du courant alternatif pour transport l'électricité via les lignes hautes tensions.

- + Transformateurs en AC pour diminuer les pertes.
- L'effet de peau pour du transport longues distances.
- Impossibilité de transporter sous-terre et sous la mer.
- Energies renouvelables produites en DC.
- Pas de possibilité de connexions asynchrones.

Pourquoi veut-on transporter l'électricité avec du courant continu maintenant ?

- Dispositifs permettant d'augmenter le voltage du courant continu.
- Augmentation de la production du courant continu.
- Augmentation de la production à fréquence variable.
- Lignes sous-marines, sous-terraines, transport sur de plus longues distances.



Explicit radial solutions

Pour $\lambda \in]-\infty, \frac{-1}{r_0^2}] \cup [0, +\infty[$,

$$\varphi(r) = \frac{F_\lambda(1) - F_\lambda(r)}{F_\lambda(1) - F_\lambda(r_0)},$$

$$\text{avec } A = A_\lambda = \frac{\sqrt{|\lambda + \frac{1}{r_0^2}|}}{F_\lambda(1) - F_\lambda(r_0)},$$

$$\rho(r) = \frac{|\lambda|}{(F_\lambda(1) - F_\lambda(r_0))\sqrt{|1 + \lambda r^2|}},$$

où la fonction F_λ est donnée par :

$$F_\lambda(s) = \begin{cases} \sqrt{-\lambda s^2 - 1} - \arctan(\sqrt{-\lambda s^2 - 1}) & \text{si } \lambda \leq \frac{-1}{r_0^2}, \\ \sqrt{1 + \lambda s^2} - \ln(\sqrt{1 + \lambda s^2} + 1) + \ln(s) & \text{si } \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Lien avec la dérivée normale de la solution électrostatique

Soit $\varphi_e \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_e(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \varphi_e(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \\ \varphi_e(x) = 0, & x \in \Gamma_d, \end{cases}$$

et $\varphi \in H^1(\Omega)$ l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \rho(x), & x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0, & x \in \Gamma_d \\ \varphi(x) = 1, & x \in \Gamma_c, \end{cases}$$

et $\rho \in L^2(\Omega), \rho \not\equiv 0$ et $\rho \geq 0$.

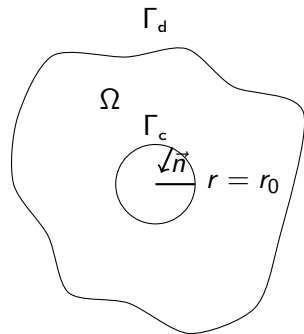
Lien avec la dérivée normale de la solution électrostatique

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 . On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \leq \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} > 0, \quad \text{on } \Gamma_c,$$

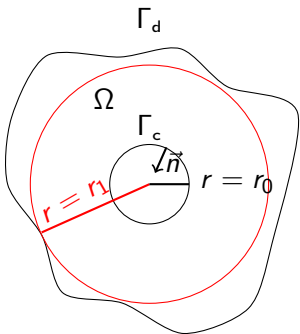
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \leq \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} < 0, \quad \text{on } \Gamma_d.$$

Bornes sur la dérivée normale de la solution électrostatique



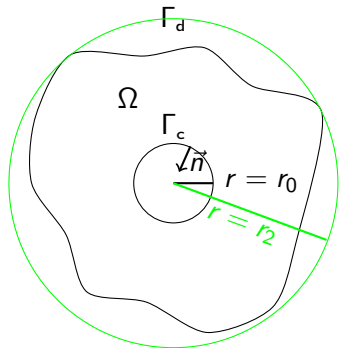
Bornes sur la dérivée normale de la solution électrostatique

$$\left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} \leq \frac{-1}{r_1 \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)},$$



Bornes sur la dérivée normale de la solution électrostatique

$$\left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} \geq \frac{-1}{r_2 \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right)}.$$



Bornes sur la dérivée normale de la solution électrostatique

$$\left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} \leq \frac{-1}{r_1 \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)},$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \right|_{\Gamma_c} \geq \frac{-1}{r_2 \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right)}.$$

