Co-résolution du pas de temps par optimisation sous contraintes pour les solveurs implicites

Ibtihel BEN-GHARBIA, IFPEN - Rueil-Malmaison
Arthur BRANCHU-HAREL, IRMAR – INSA - Rennes
Mounir HADDOU, IRMAR – INSA - Rennes
Quang Huy TRAN, IFPEN - Rueil-Malmaison

Nous nous intéressons au problème du choix du pas de temps dans les schémas numériques implicites pour la résolution d'EDO et d'EDP non linéaires. En effet, les schémas implicites sont théoriquement inconditionnellement stables, mais le caractère non linéaire ainsi que le choix du solveur peuvent contraindre le choix du pas de temps afin de garantir la convergence. La majorité des méthodes développées pour adresser ce problème se base sur des heuristiques et adoptent une approche « essayer-adapter-essayer » [2]. A contrario, des méthodes plus rigoureuses, mais moins génériques et plus coûteuses ont été développées, comme les méthodes de continuation [4] ou de co-résolution [3].
Une nouvelle approche a été proposée et étudiée sur des EDO scalaires et vectorielles simples à l'occasion de deux stages à l'INSA Rennes en partenariat avec IFPEN. Elle consiste à formuler un problème d'optimisation convexe sous contraintes visant à maximiser le pas de temps. Un ensemble de contraintes a été proposé, garantissant d'une part l'existence d'une solution du schéma numérique et d'autre part la faisabilité du pas de Newton. Une méthode de résolution de ce problème d'optimisation a également été présenté basé sur une stratégie de découplage.
Nous avons poussé l'étude de cette approche au cadre des EDP, comme le p-laplacien instationnaire (diffusion non linéaire) et l'équation d'Allen-Cahn. Ces problèmes ont révélé des limites dans les choix des contraintes ainsi que des difficultés numériques. Pour le p-laplacien, la condition de faisabilité du pas de Newton est inutile du fait des propriétés de la Jacobienne. Dans le cas d'Allen-Cahn, le calcul de la plus petite valeur propre s'est avéré nécessaire à cause des limites de calcul du déterminant par MATLAB. Nos observations ont par ailleurs soulevé des questions sur la concavité de la fonction valeur propre. Nous avons aussi expérimenté des contraintes construites à partir des théorèmes de convergence semi-locale de la méthode de Newton comme ceux de Kantorovitch et Smale [1]. Elles ont l'avantage de garantir la convergence de Newton, mais souvent au prix d'un important coût d'évaluation des contraintes.

[1] J.-P. Dedieu. *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*, vol. 54 of *Mathématiques et Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2006. doi :10.1007/3-540-37660-7.

[2] N. Leterrier. *ARES : An efficient approach to adaptive time integration for stiff differential-algebraic equations.* Computers & Chemical Engineering, **119**, 46–54, 2018. doi : 10.1016/j.compchemeng.2018.08.009.

[3] G. Ren, R. M. Younis. *Efficient co-solution of time step size and independent state in simulations of fluid-driven fracture propagation with embedded meshes.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, **123(10)**, 2262–2289, 2022. doi :10.1002/nme.6935.

[4] R. Younis, H. Tchelepi. *Adaptively localized continuation-newton method–nonlinear solvers that converge all the time.* SPE Journal - SPE J, **15**, 526–544, 2010. doi :10.2118/119147-PA.

Contact : arthur.branchu-harel@insa-rennes.fr