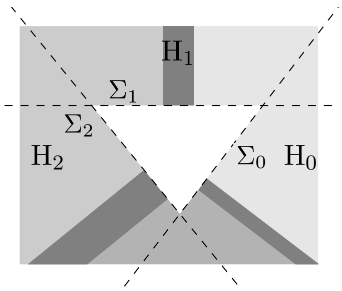
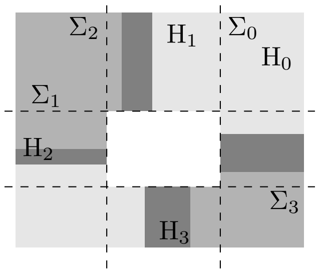
Problèmes de diffraction dans des jonctions de demi-espaces stratifiés

<u>Sarah AL HUMAIKANI</u>, POEMS, CNRS, Inria, ENSTA, IP Paris - Palaiseau
Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, POEMS, CNRS, Inria, ENSTA, IP Paris - Palaiseau
Sonia FLISS, POEMS, CNRS, Inria, ENSTA, IP Paris - Palaiseau





On considère l'équation de Helmholtz dans un domaine $\Omega := \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ étant un triangle ou un rectangle) qui coïncide avec l'union de N (resp. $N = 3$ ou $N = 4$) demi-plans stratifiés $\mathrm{H}_n := \{(\textsc{x}_n, \textsc{y}_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \textsc{x}_n > 0\}$ pour $n = 1, ..., N$, où $(\textsc{x}_n, \textsc{y}_n)$ est un système de coordonnées locales obtenu à partir des coordonnées globales (x, y) par rotation et translation. Chaque demi-plan $\mathrm{H_n}$ est dit stratifié en tant qu'il est associé à un nombre d'onde variable, donné par une fonction bornée à valeurs réelles $\textsc{k}_n$ qui vérifie $\textsc{k}_n = \textsc{k}_n(\textsc{y}_n)$. Ainsi, la stratification est orthogonale à la frontière Σ_n de $\mathrm{H_n}$. De plus, on suppose que $\textsc{k}_n$ devient constant de part et d'autre d'un intervalle borné. Notons $\textsc{k}$ le nombre d'onde qui coïncide avec les $\textsc{k}_n$ dans chaque demi-espace. Par simplicité, on considère un problème extérieur dont on cherche à caractériser et calculer la solution sortante,

$$-\Delta u - \textsc{k}^2 u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega, \tag{1}$$

où $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. C'est une problématique qui n'est pas évidente à traiter puisque, pour cette classe de problèmes, la définition de la solution sortante n'est pas claire. Cette difficulté est liée au fait qu'on ne connait pas la fonction de Green du milieu et qu'on ne peut pas utiliser la séparation des variables pour exprimer une condition de bord transparente ou une condition de radiation adaptée. On utilise la méthode des demi-plans raccordés ou Half-Space Matching method (HSM). Cette méthode est basée sur des représentations de demi-espace de la solution dans chaque $\mathrm{H_n}$ en fonction de sa trace φ_n sur la frontière du demi-plan Σ_n. Le problème est alors récrit sous la forme d'un système d'équations intégrales couplées, où les inconnues sont exactement les traces φ_n. Pour le problème de diffraction considéré, le cadre fonctionnel pertinent pour les traces ainsi que le caractère bien posé du système HSM ne sont pas clairs. A la place, on propose comme dans [1] un système similaire, nommé Complex Scaled HSM où les inconnues des équations intégrales sont des prolongements analytiques exponentiellement décroissants des traces.

Comme expliqué précédemment, l'outil principal dans cette démarche est l'obtention des représentations de demi-espace. Pour les milieux stratifiés, elles sont obtenues en utilisant la transformée de Fourier dans la direction $\textsc{x}_n$ (qui diagonalise $-\partial^2_{\textsc{x}_n}$) ou la transformée de Fourier généralisée (qui diagonalise $-\partial^2_{\textsc{y}_n} - \textsc{k}^2(\textsc{y}_n)$). Chaque représentation présente des avantages et des inconvénients d'un point de vue théorique comme numérique.

Des résultats numériques seront présentés lors de l'exposé.

[1] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, S. N. Chandler-Wilde, S. Fliss, C. Hazard, K.-M. Perfekt, Y. Tjandrawidjaja. *The complex-scaled half-space matching method*, 2021.

<u>Contact :</u> `sarah.al-humaikani@ensta.fr`