

Sur la structure des équations de la dynamique des poutres et une classification des problèmes associés

Oscar COSSERAT, Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT - Madrid, France

Loïc LE MARREC, Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625 - F-35000 Rennes, France

Aftab Yusuf PATEL, Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625 - F-35000 Rennes, France

Par structures élancées à une dimension on regroupe divers modèles élastiques : les cordes, les filaments, les poutres ou les câbles. Pour un de ces exemples il peut exister plusieurs modèles : modèle d'Euler-Bernoulli, de Timoshenko, de Kirchhoff. Nous présenterons une formulation générique de ces modèles de structures élancées qui s'appuie sur la cinématique de Cosserat en grande déformation et en grand déplacement. Ce problème hautement non-linéaire a néanmoins une formulation très simple quand un formalisme géométriquement exact est proposé [1].

La dynamique tri-dimensionnelle s'exprime alors sous la forme de deux problèmes faiblement découplés.

Le premier problème gouverne la dynamique des variables de l'espace tangent : vitesses, déformations. Il s'exprime sous la forme d'une EDP de transport avec un terme quadratique générant des couplages entre les dynamiques de flexion, longitudinales et de torsion. Dans son cadre général, cette EDP est composée de 12 équations et de 12 variables.

Les variables cinématiques (position et rotation) sont associées à un problème d'EDO dont les termes sources sont les variables de l'espace tangent. De manière curieuse, cette formulation permet de déterminer les variables cinématiques soit à partir d'une EDO en espace, soit à partir d'une EDO en temps.

Dans un dernier temps nous montrerons les conséquences de cette formulation géométriquement exacte sur le plan physique et numériques en fournissant quelques exemples.

Les auteurs souhaitent remercier le GDR 'Géométrie Différentielle et Mécanique' (GDR GDM) pour son soutien et pour les riches discussions associées à ce projet. Nous souhaitons également remercier l'AMIES (Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société) pour leur soutien financier au post-doc d'Aftab Yusuf Patel. Enfin, nous remercions l'entreprise D-ICE pour l'intérêt porté à cette étude.

[1] O. Cosserat, L. L. Marrec. *Timoshenko beam under finite and dynamic transformations : Lagrangian coordinates and hamiltonian structures*. Communications in Analysis and Mechanics, **18(1)**, 37–69, 2026. doi :10.3934/cam.2026002.