

# Parallelisation en espace-temps de l'équation de Landau-Lifschitz dans des réseaux de nanofils ferromagnétiques

Soré Soumaila

Directeur de thèse : Stéphane Labbé

Université de la Sorbonne

jeudi 4 juin 2026

# Plan

- 1 Modélisation des matériaux ferromagnétiques
  - Nanofils ferromagnétiques
  - Réseaux de nanofils ferromagnétiques
  - Espace fonctionnel des réseaux de nanofils
  - Condition de Kirchhoff aux nœuds internes d'un sous-réseau
  - Équation de Landau-Lifschitz
  - Modèle de jonction de plusieurs fils
- 2 Algorithme de Schwarz
  - Décomposition de domaine en temps
  - Décomposition de domaine en espace-temps
- 3 Quelques simulations pour les réseaux de nanofils

## Paramétrisation d'un nano-fil

Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^3$ . On dit que  $\omega$  est un fil si :

- 1 Il existe  $L(\omega) \in \mathbb{R}_+^*$  et

$$\varphi_\omega : [0, L(\omega)] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tels que :

- $\varphi_\omega \in \mathcal{C}^\infty([0, L(\omega)]; \mathbb{R}^3)$  ;
- pour tout  $s \in [0, L(\omega)]$ ,

$$|\varphi'_\omega(s)| = 1;$$

- $\varphi_\omega$  est une bijection de  $]0, L(\omega)[$  sur  $\omega$  ;

$$\{\varphi_\omega(0), \varphi_\omega(L(\omega))\} \cap \omega = \emptyset.$$

## Repère local le long d'un nano-fil

- 2 Soient

$$u_\omega, v_\omega \in C^\infty([0, L(\omega)]; \mathbb{R}^3)$$

tels que, pour tout  $s \in [0, L(\omega)]$ ,

$$(\varphi'_\omega(s), u_\omega(s), v_\omega(s))$$

soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- 3 Soient

$$a_\omega, b_\omega \in C^\infty([0, L(\omega)]; \mathbb{R}_+^*)$$

tels que

$$\sigma_\omega = \pi a_\omega b_\omega.$$

## Illustration d'un nano-fil

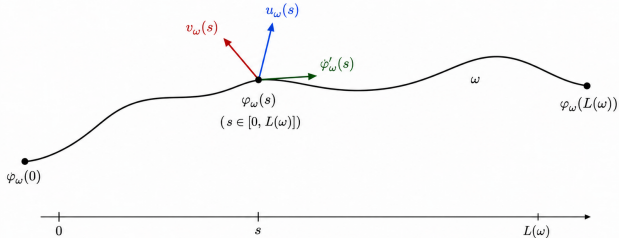


Figure – Paramétrisation d'un nanofil

## Réseaux de nanofils ferromagnétiques

Soit  $\mathcal{R}$  un réseau de nanofils ferromagnétiques et  $d$  le nombre de sous-réseaux.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on note  $\mathcal{R}_i$  le sous-réseau  $i$ . On définit alors :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^d \mathcal{R}_i, \quad \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_i^0 \cup \mathcal{R}_i^1 \text{ avec } \mathcal{R}_i^1 \cap \mathcal{R}_j^1 = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

- $\mathcal{R}_i^0$  est un ensemble fini d'objets de dimension de Hausdorff nulle.
- $\mathcal{R}_i^1$  est un ensemble fini d'objets de dimension de Hausdorff 1.

## Voisinage des sommets et des fils

Pour tout sous-réseau  $\mathcal{R}_i$ , on définit :

- ① Pour tout  $p \in \mathcal{R}_i^0$ ,

$$\mathcal{V}_i^1(p) = \{\omega \in \mathcal{R}_i^1 \mid p \in \bar{\omega}\}.$$

- ② Pour tout  $\omega \in \mathcal{R}_i^1$ ,

$$\mathcal{V}_i^0(\omega) = \{p \in \mathcal{R}_i^0 \mid p \in \bar{\omega}\}.$$

- ③ Pour tout  $\omega \in \mathcal{R}_i^1$ ,

$$\mathcal{V}_i^1(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{R}_i^1 \mid \mathcal{V}_i^0(\omega) \cap \mathcal{V}_i^0(\omega') \neq \emptyset\}.$$

## Paramétrisation des fils du réseau

- 4 Pour tout  $(\omega, p) \in \mathcal{R}_i^1 \times \mathcal{R}_i^0$ , on définit :

$$s(\omega, p) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{si } p = \varphi_\omega(0), \\ \{1\}, & \text{si } p = \varphi_\omega(L(\omega)), \\ \{-1, 1\}, & \text{si } p = \varphi_\omega(0) = \varphi_\omega(L(\omega)), \\ \{0\}, & \text{si } p \notin \mathcal{V}_i^0(\omega). \end{cases}$$

- 5 L'ensemble

$$\bigcup_{\omega \in \mathcal{R}_i} \omega$$

est supposé connexe.

## Conditions géométriques sur le réseau

- 6 Pour tout  $(\omega, \omega') \in \mathcal{R}_i^1 \times \mathcal{R}_i^1$ , si  $\omega \neq \omega'$ , alors

$$\bar{\omega} \cap \bar{\omega}' \subset \mathcal{R}_i^0.$$

- 7 Pour tout  $p \in \mathcal{R}_i^0$ ,

$$\left\{ s \varphi'_\omega \left( \frac{s+1}{2} L(\omega) \right) \mid \omega \in \mathcal{V}_i^1(p), s \in s(\omega, p) \right\}$$

est un ensemble d'éléments distincts.

## Bords et jonctions

- 9 Le bord du sous-réseau  $\mathcal{R}_i$  est défini par

$$\partial\mathcal{R}_i^0 = \{p \in \mathcal{R}_i^0 \mid \#\mathcal{V}_i^1(p) = 1\}.$$

- 10 L'ensemble des jonctions internes de  $\mathcal{R}_i$  est

$$\mathcal{J}(\mathcal{R}_i^0) = \overline{\partial\mathcal{R}_i^0}$$

- 11 Pour tout  $p \in \mathcal{R}_i^0$ , on définit

$$\mathcal{S}(p) := \{i \in \{1, \dots, d\} \mid p \in \mathcal{R}_i^0\}, \quad d_p := |\mathcal{S}(p)|.$$

## Jonctions partagées

Pour tout  $i \neq j$ , on définit les jonctions partagées entre  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_j$  par :

$$\Gamma_{i,j} := \mathcal{R}_i^0 \cap \mathcal{R}_j^0$$

Ces points correspondent aux sommets appartenant à plusieurs sous-réseaux.

## Espace fonctionnel

### Définition

Soit  $\mathcal{R}_i$  un sous-réseau pour tout  $i = 1, \dots, d$ . On note  $\forall q \in \mathbb{N}^*$   $H^q(\mathcal{R}_i; \mathbb{R}^3)$  l'ensemble des fonctions  $m_i = (m_{\omega,i})_{\omega \in \mathcal{R}_i^1}$  telles que :

①  $\forall \omega \in \mathcal{R}_i^1$

$$m_{\omega,i} \in H^q([0, L(\omega)], \mathbb{R}^3)$$

② (Continuité aux nœuds) Pour tout  $p \in \mathcal{R}_i^0$ , on a :

$$\exists \xi_p \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \omega \in \mathcal{V}_i^1(p), \forall s \in \varphi_\omega^{-1}(p), m_{\omega,i}(s) = \xi_p$$

③ En posant  $m = (m_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$  et pour tout  $p \in \Gamma_{i,j}$

$$\exists \xi_p \in \mathbb{R}^3 \mid \forall p \in \Gamma_{i,j}, \forall s \in \varphi_\omega^{-1}(p), m_i(s) = m_j(s) = \xi_p$$

## Condition de Kirchhoff

### Définition

Soit  $m_i = (m_{\omega,i})_{\omega \in \mathcal{R}_i^1} \in H^2(\mathcal{R}_i; \mathbb{R}^3)$  pour tout  $i = 1, \dots, d$ . Alors

- 1 Pour tout  $\omega \in \mathcal{R}_i^1$ ,

$$m_{\omega,i} \in H^2([0, L(\omega)]; \mathbb{R}^3).$$

- 2 Pour tout nœud  $p \in \mathcal{J}(\mathcal{R}_i^0)$ , on a la condition de Kirchhoff :

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathcal{V}_i^1(p) \\ \varepsilon \in \mathcal{S}(\omega, p)}} \varepsilon \sigma_\omega \left( \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right) \frac{\partial m_{\omega,i}}{\partial s} \left( \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right) = 0.$$

## Domaine magnétique

### Définition

- Domaine magnétique :  $\mathcal{R}_i$  est un sous-réseau de magnétique, pour tout  $i = 1, \dots, d$ .
- Sphère unité :

$$\mathcal{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}.$$

- Sur chaque fil  $\omega \in \mathcal{R}_i^1$ , la magnétisation au temps  $t$  est donnée par :

$$m_{\omega,i}(t, \cdot) \in H^1([0, L(\omega)]; \mathcal{S}^2).$$

- Elle vérifie la contrainte de norme constante :

$$|m_{\omega,i}(t, s)| = 1, \quad \forall s \in [0, L(\omega)].$$

## Équation de Landau–Lifshitz

### Définition

Pour tout  $\omega \in \mathcal{R}_i^1$ , on considère la magnétisation

$$m_{\omega,i} : [0, T] \times [0, L(\omega)] \longrightarrow \mathcal{S}^2.$$

Elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial m_{\omega,i}}{\partial t} = -m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}} - \alpha m_{\omega,i} \times (m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}}).$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \partial_{ss} m_{\omega,i} + \frac{1}{2} (m_{\omega,i} | \varphi'_{\omega}) \varphi'_{\omega} + H_a$$

## Jonction de plusieurs fils

### Modèle de jonction

$$m_{\omega,i} : [0, T] \times [0, L(\omega)] \longrightarrow \mathcal{S}^2.$$

$$\frac{\partial m_{\omega,i}}{\partial t} = -m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}} - \alpha m_{\omega,i} \times (m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}}).$$

$$\forall p \in \mathcal{J}(\mathcal{R}_i^0), \exists \xi_p \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \omega \in \mathcal{R}_i^1, \forall s \in \varphi_\omega^{-1}(p), \forall t \in [0, T]$$

$$m_{\omega,i}(t, s) = \xi_p$$

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathcal{V}_i^1(p) \\ \varepsilon \in \mathcal{S}(\omega, p)}} \varepsilon \sigma_\omega \left( \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right) \frac{\partial m_{\omega,i}}{\partial s} \left( \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right) = 0.$$

## Méthode parareal classique

On décompose le segment  $[0, T]$  en  $N_t$  sous-intervalles, donc pour tout  $n \in \{0, \dots, N_t\}$ , on a :

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n \leq \dots \leq T_{N_t} = T$$

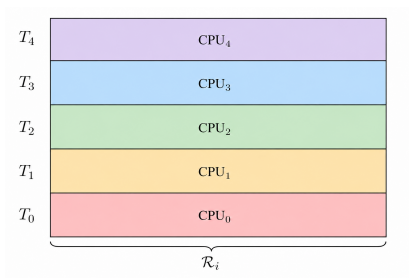


Figure – Décomposition de domaine en temps

## Méthode parareal classique

### Dynamique parareal

Soit  $m_i = (m_{\omega,i})_{\omega \in \mathcal{R}_i} \in H^1(\mathcal{R}_i; \mathcal{S}^2)$  ainsi, pour tout  $\omega \in \mathcal{R}_i$ , on a :

$$m_{\omega,i} : [T_n, T_{n+1}] \times [0, L(\omega)] \longrightarrow \mathcal{S}^2.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m_{\omega,i}}{\partial t} = -m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}} - \alpha m_{\omega,i} \times (m_{\omega,i} \times \mathcal{H}_{\text{eff}}), \\ m_{\omega,i}(T_n, \cdot) = U_{\omega,i,n}, \\ \mathcal{H}_{\text{eff}} = \partial_{SS} m_{\omega,i} + \frac{1}{2} (m_{\omega,i} | \varphi'_{\omega}) \varphi'_{\omega} + H_a. \end{array} \right.$$

## Parareal classique

### Propagateur grossier $G$ et propagateur fin $F$

- 1 Le propagateur grossier  $G_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n})$  donne une approximation grossière de  $m_{\omega,i}(T_{n+1})$ , il est moins précis mais peu coûteux avec condition initiale

$$m_{\omega,i}(T_n) = U_{\omega,i,n}.$$

- 2 Le propagateur fin  $F_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n})$  donne une approximation précise de  $m_{\omega,i}(T_{n+1})$  assez précis mais très coûteux, avec condition initiale

$$m_{\omega,i}(T_n) = U_{\omega,i,n}.$$

## Algorithme parareal classique

L'algorithme démarre par une approximation initiale grossière  $U_{\omega,i,n}^0$  aux instants  $T_0, T_1, \dots, T_{N_t}$ , obtenue à l'aide du propagateur grossier  $G$  :

$$\begin{cases} U_{\omega,i,0}^0 := m_{\omega,i}^0, \\ U_{\omega,i,n+1}^0 := G_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n}^0), \quad n = 0, \dots, N_t. \end{cases}$$

Puis, pour  $k = 0, 1, \dots$ , on calcule l'itération de correction :

$$\begin{cases} U_{\omega,i,0}^{k+1} := m_{\omega,i}^0, \\ U_{\omega,i,n+1}^{k+1} := F_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n}^k) \\ \quad + G_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n}^{k+1}) \\ \quad - G_{i,n}(T_{n+1}, T_n, U_{\omega,i,n}^k), \quad n = 0, \dots, N_t. \end{cases}$$

## Décomposition de domaine en espace-temps

On décompose le segment  $[0, T]$  en  $N_t$  sous-intervalles et  $\mathcal{R}$  en  $d$  sous-espaces :  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_d$ .

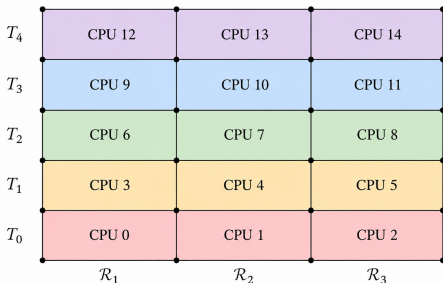


Figure – Décomposition de domaine en espace-temps

## Parareal espace-temps

### Dynamique parareal espace-temps

Pour tout  $m_i \in H^1(\mathcal{R}_i; \mathcal{S}^2)$ , on a :

$$\begin{cases} m_i : [T_n, T_{n+1}] \times \mathcal{R}_i \longrightarrow \mathcal{S}^2. \\ \frac{\partial m_i}{\partial t} = -m_i \times \mathcal{H}_{\text{eff}} - \alpha m_i \times (m_i \times \mathcal{H}_{\text{eff}}), \\ m_i(T_n, \cdot) = U_{i,n}, \\ \mathcal{H}_{\text{eff}} = \partial_{ss} m_i + \frac{1}{2} (m_i | \varphi'_\omega) \varphi'_\omega + H_a. \end{cases}$$

## Conditions de Robin généralisées aux jonctions partagées

S. Soré & S. Labbé

Sur chaque fenêtre temporelle  $t \in [T_n, T_{n+1}]$ , pour  $m_i \in H^1(\mathcal{R}_i; S^2)$  et pour tout  $p \in \mathcal{R}_i^0 \cap \mathcal{R}_j^0$ , on a :

$$\Phi_{i,n}^{k+1}(p, t) + \beta m_i^{k+1}(p, t) = - \sum_{\substack{j \in S(p) \\ j \neq i}} \Phi_{j,n}^k(p, t) + \beta M_{i,n}^k(p, t).$$

avec

$$\Phi_{i,n}^{k+1}(p, t) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{V}_i^1(p) \\ \varepsilon \in S(\omega, p)}} \varepsilon \sigma_\omega \left( \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right) \frac{\partial m_{\omega,i}^{k+1}}{\partial s} \left( t, \frac{\varepsilon + 1}{2} L(\omega) \right),$$

et

$$M_{i,n}^k(p, t) = \frac{1}{d_p - 1} \sum_{\substack{j \in S(p) \\ j \neq i}} m_{\omega,j}^k(p, t).$$

## Algorithme espace-temps

En posant la quantité  $q_{i,n}^k$  de Robin reçue à l'itération  $k$  sur la fenêtre  $[T_n, T_{n+1}]$  par  $\mathcal{R}_i$  :

$$q_{i,n}^k(p, t) = - \sum_{\substack{j \in S(p) \\ j \neq i}} \Phi_{j,n}^k(p, t) + \beta M_{i,n}^k(p, t).$$

Pour  $k = 0, 1, \dots$ , on calcule l'itération de correction :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i,0}^{k+1} := m_i^0, \\ U_{i,n+1}^{k+1} := F_{i,n}(U_{i,n}^k, q_{i,n}^k) \\ \quad + G_{i,n}(U_{i,n}^{k+1}, q_{i,n}^{k+1}) \\ \quad - G_{i,n}(U_{i,n}^k, q_{i,n}^k), \end{array} \quad n = 0, \dots, N_t. \right.$$

## Simulations

$$S_1 = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$



Figure – Solution de référence obtenue à  $T = 0$ .

## Simulation

$N_x = 2, N_t = 3, L_1 = L_2 = 4$  et  $\ell < \arctan(2)$

$$M_1 = \left( \left( \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

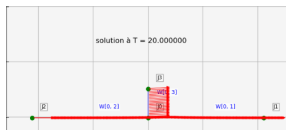


Figure – À gauche la solution à  $T = 0$ , à droite la solution à  $T = 20$

## Simulations

$N_x = 2, N_t = 3, L_1 = L_2 = 4$  et  $\ell > \arctan(2)$

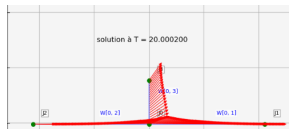


Figure – À gauche la solution à  $T = 0$ , à droite la solution à  $T = 20$

## Simulations

$$S_2 = \left( \left( \begin{pmatrix} -\tanh(x) \\ 1 \\ \cosh(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \tanh(x) \\ 1 \\ \cosh(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \tanh(1) \\ 1 \\ \cosh(1) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

$$M_2 = \left( \left( \begin{pmatrix} -\tanh(x+1) \\ 1 \\ \cosh(x+1) \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \tanh(x+1) \\ 1 \\ \cosh(x+1) \\ 0 \end{pmatrix} \right), \left( \begin{pmatrix} \tanh(1) \\ 1 \\ \cosh(1) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right).$$

## Simulation

On relance les calculs avec  $N_x = 2$  et  $N_t = 4$  c'est-à-dire avec  $N_{\text{proc}} = 8$

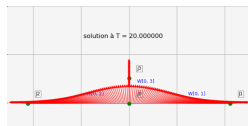
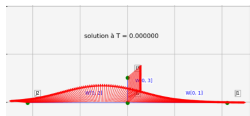
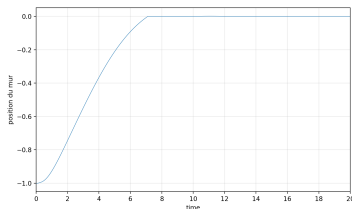


Figure – À gauche la solution à  $T = 0$ , à droite la solution à  $T = 20$



## Simulations

On lance les calculs pour différentes valeurs du champ appliqué.

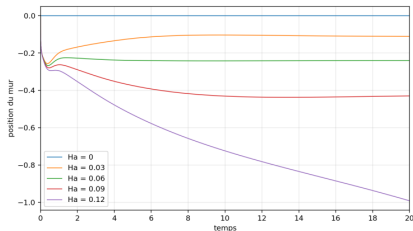


Figure – L'évolution du mur en fonction du temps

## Injection de courant : reste à venir

Les travaux théoriques sur l'injection de courant sont en train d'être finalisés par

Stéphane Labbé et Gilles Carbou

La partie simulation sera réalisée par :

Soré Soumaila

## Conclusion

Merci de votre  
attention!

