

## Solveurs de Riemann approchés partiels pour le traitement de conditions aux bords dissipatives discrètes des équations de Saint-Venant.

**Geoffrey BECK**, Univ Rennes, Inria Bretagne Atlantique - Rennes  
**Ludovic MARTAUD**, Univ Rennes, Inria Bretagne Atlantique - Rennes

Ce mini-symposium concerne l'approximation numérique des équations de Saint-Venant posées sur le demi plan  $[0, +\infty[$ . Ces équations régissent la hauteur  $h(x, t) > 0$  d'un fluide animé d'un débit  $q(x, t) \in \mathbb{R}$  dans un champs de pesanteur  $g > 0$  et elles s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix} = 0, & \forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \\ q(0, t) = q_0(t), & \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $q_0(t)$  désigne une donnée de bord. D'après [3], les solutions admissibles de (1) vérifient une inégalité d'entropie  $\partial_t \eta(h, q) + \partial_x G(h, q) \leq 0$  pour le couple  $\eta(h, q) = q^2/(2h) + gh^2/2$ ,  $G(h, q) = q^3/(2h^2) + qgh$ . Ainsi, si  $q_0(t) \leq 0, \forall t \geq 0$  alors l'inégalité d'entropie globale suivante est satisfaite :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \eta(h, q) dx \leq 0. \quad (2)$$

Les solutions faibles  $w = (h, q)^\top \in \mathbb{R}^2$  de (1) sont approchées par un schéma aux volumes finis défini sur un maillage espace-temps de pas  $\Delta x, \Delta t > 0$  et par un flux numérique  $\mathcal{F}(\cdot, \cdot)$ . Un tel schéma s'écrit

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(w_i^n, w_{i+1}^n) - \mathcal{F}(w_{i-1}^n, w_i^n)), \quad \forall i \geq 1, \quad (3)$$

où  $(w_i^n)_{i \geq 0} \subset \mathbb{R}^2$  approche  $w(\cdot, t^n)$ . Le schéma (3) doit être complété par une méthode additionnelle qui permet le calcul de la condition de bord discrète mise à jour  $w_0^{n+1} = (h_0^{n+1}, q_0^{n+1})^\top$  mais, contrairement à  $q(0, t^{n+1})$ , la quantité  $h(0, t^{n+1})$  n'est pas une donnée du problème (1).

Dans ce contexte, ce mini-symposium propose d'exprimer  $h_0^{n+1}$  avec un solveur de Riemann approché partiel noté  $\tilde{h}(\cdot, w_0^n, w_1^n)$  et sous la forme suivante :

$$h_0^{n+1} = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \tilde{h}((x - x_{\frac{1}{2}})/\Delta t, w_0^n, w_1^n) dx. \quad (4)$$

Des critères de consistance et de stabilité pour  $\tilde{h}(\cdot, w_0^n, w_1^n)$  sont proposés sous la forme d'une extension de [1, 2]. Ces critères permettent d'obtenir un équivalent discret de (2) et ils sont explicitement appliqués lorsque (3) est muni du schéma HLL. Ces résultats sont également accompagnés d'expériences numériques qui illustrent la pertinence de la méthode proposée.

- [1] F. Dubois, P. L. Floch. *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*. Journal of Differential Equations, **71**(1), 93–122, 1988.
- [2] A. Harten, P. Lax, B. Van Leer. *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM review, **25**, 35–61, 1983.
- [3] P. G. LeFloch. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002. The theory of classical and nonclassical shock waves.