Résolution de problèmes de transmission dans le domaine temporel en présence d'interfaces non bornées

Mayssa MROUEH, UMA-ENSTA - Palaiseau
Luiz MALTEZ FARIA, UMA-ENSTA - Palaiseau
Maryna KACHANOVSKA, UMA-ENSTA - Palaiseau

Dans cet exposé, nous étudions la propagation d'ondes décrite par l'équation des ondes dans un domaine extérieur $\Omega^e \subset \mathbb{R}^n$, supposé être l'hypographe lipschitzien plate à l'infini. Plus précisément, pour $n = 2$, on considère $\Gamma = \partial\Omega^e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = h(x)\}$, où $h(x) = 1$ pour $|x| > A$ et où h est une fonction lipschitzienne :

$$\begin{cases} -\partial_t^2 u + \Delta u &= 0 \quad \text{dans } \Omega^e \times [0, T], \\ u_{|\Gamma} &= g \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T], \\ u(x, 0) &= 0, \\ \partial_t u(x, 0) &= 0. \end{cases} \tag{1}$$

L'idée principale est de traiter le problème (1) à l'aide d'équations intégrales de frontière, Ce qui ramène le problème (1) à un autre problème défini sur l'interface Γ. Cependant, Γ est non bornée. Pour traiter ce problème, nous combinons la méthode des équations intégrales de frontière dépendantes du temps (TDBIE) avec la méthode des couches parfaitement adaptées (PML), comme suggéré dans le domaine libre [1]. Pour cela, nous introduisons une PML dans la direction de l'axe x dans le domaine de Laplace par un changement de variable défini par : $\alpha(x) = 1 + \frac{\sigma(x)}{s}$, $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$, On résout ensuite l'équation intégrale $Sq = g$, avec

$$(Sq)(t, x) = \int_0^t \int_\Gamma G_\alpha(t - \tau, x - y)\, q(\tau, y)\, d\lambda_y\, d\tau,$$

où G_α est la solution fondamentale du problème modifié par la PML. On cherche la densité q, qui décroît rapidement en espace grâce à la PML. On peut alors remplacer l'intégrale sur Γ par une intégrale sur Γ_α, qui est une troncature de Γ.

Au niveau théorique, nous montrons que le problème PML-isé est bien posé et admet une solution unique. Ensuite, nous montrons que l'opérateur de simple couche modifié S, perturbé par un opérateur $R : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Gamma)$, est coercif.

Enfin, nous présentons des résultats numériques obtenus à l'aide de la méthode de quadrature de convolution pour la discrétisation temporelle, illustrant l'efficacité de l'approche proposée ainsi que la qualité d'absorption fournie par la PML.

[1] W. Lu, Y. Y. Lu, J. Qian. *Perfectly matched layer boundary integral equation method for wave scattering in a layered medium.* SIAM Journal on Applied Mathematics, **78(1)**, 2018.

Contact : `mayssa.mroueh@ensta.fr`