Non-commutativité en transport non local

Vincent BOULARD, CERMICS/LJLL - Paris/Marne-la-Vallée
Amaury HAYAT, CERMICS - Marne-la-Vallée
Benedetto PICCOLI, Department of Mathematical Sciences Rutgers University - Camden
Emmanuel TRÉLAT, LJLL - Paris

La modélisation de la dynamique de grandes populations d'agents en interaction constitue un enjeu central en mathématiques appliquées, avec des applications allant du contrôle multi-agents à la dynamique d'opinion en passant par la modélisation du trafic. Un cadre naturel pour décrire l'évolution de la distribution spatiale de ces agents est celui de l'équation de continuité non locale résultant d'une *limite de champ moyen*, de la forme

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b(\cdot, \mu_t)\, \mu_t) = 0, \tag{1}$$

où $\mu_t \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ représente la distribution de la population à l'instant t et $b : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs non local, c'est-à-dire dépendant de la mesure elle-même. Ce type d'équation intervient de manière fondamentale dans la théorie du contrôle optimal en champ moyen [2] ainsi que dans le cadre plus général des équations différentielles de mesures (MDE) introduites dans [3], qui permettent une description unifiée de phénomènes de transport, diffusion et concentration à vitesse finie.

En dimension finie, un outil classique pour étudier la commutativité des flots d'équations différentielles ordinaires est le *crochet de Lie* de deux champs de vecteurs $X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$:

$$[X, Y](x) = DY(x) \cdot X(x) - DX(x) \cdot Y(x).$$

Le théorème classique affirme que les flots Φ_t^X et Φ_s^Y commutent si et seulement si $[X, Y] \equiv 0$. Ce résultat est un ingrédient essentiel en théorie du contrôle géométrique, où il sous-tend notamment le théorème de Chow–Rashevskii sur la contrôlabilité des systèmes affines [1].

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à la question suivante : comment définir une notion pertinente de crochet de Lie pour des champs de vecteurs non locaux de la forme $b(x, \mu)$, et comment relier cette notion à la commutativité des flots associés à l'équation (1) ? Nous présenterons une nouvelle définition de crochet de Lie adaptée à ce cadre, qui généralise la notion classique et prend en compte la dépendance en mesure du champ de vecteurs via le calcul différentiel de Lions sur $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. Nous discuterons les perspectives que cette construction ouvre pour le contrôle de systèmes limite de champ moyen.

[1] A. A. Agrachev, Y. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, vol. 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. doi :10.1007/978-3-662-06404-7.

[2] B. Bonnet, H. Frankowska. *Differential inclusions in Wasserstein spaces : The Cauchy–Lipschitz framework*. Journal of Differential Equations, **271**, 594–637, 2021. doi :10.1016/j.jde.2020.08.031.

[3] B. Piccoli. *Measure differential equations*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, **233(3)**, 1289–1317, 2019. doi :10.1007/s00205-019-01379-4.

Contact : `vincent.boulard@enpc.fr`