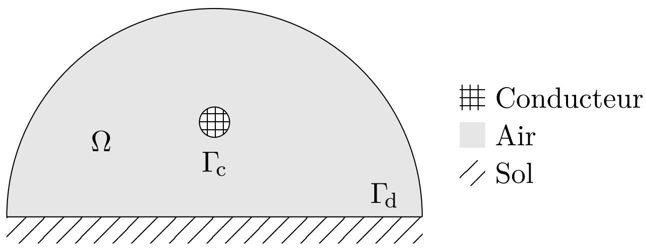
Solutions multiples et simulations pour un problème de charges d'espace appliqué aux lignes de transport d'électricité à courant continu haute tension (HVDC)

Madeline CHAUVIER, Céramaths/DMaths - Valenciennes
Serge NICAISE, Céramaths/DMaths - Valenciennes
Christophe TROESTLER, Département de Mathématique - Mons (Belgique)
Juliette VENEL, Céramaths/DMaths - Valenciennes

De nos jours, l'électricité est principalement transportée par des lignes à haute tension (HV) utilisant du courant alternatif (AC) plutôt que du courant continu (DC). Cependant, les progrès récents en matière d'électronique de puissance ainsi que le développement des énergies renouvelables ont suscité un intérêt pour le transport HVDC. Celui-ci présente également de nombreux avantages par rapport au HVAC, dont certains sont mis en évidence dans [1]. Le modèle mathématique le plus simple utilisé par la communauté des ingénieurs, appelé problème unipolaire (i.e. avec un seul conducteur) de charges d'espace, est décrit par le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta\varphi = \rho, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 1, & \text{sur } \Gamma_{\mathrm{c}}, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma_{\mathrm{d}}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}} = A, & \text{sur } \Gamma_{\mathrm{c}}, \end{cases}$$



où φ est le potentiel électrique et ρ la densité de charges d'espace définis sur un domaine Ω à bord $\mathcal{C}^{1,1}$ composé de 2 composantes disjointes Γ_{c} et Γ_{d}. L'effet couronne est modélisé par l'hypothèse de Kaptzov qui consiste à imposer que la dérivée normale extérieure du potentiel $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{n}$ sur le bord Γ_{c} du conducteur soit égale à une fonction donnée $A : \Gamma_{\mathrm{c}} \to \mathbb{R}$.

Des algorithmes pour approcher (φ, ρ) sont développés depuis plusieurs années par la communauté des ingénieurs, mais, à notre connaissance, le problème (1) n'a pas encore été abordé d'un point de vue mathématique. Dans cette communication, nous présenterons d'abord le résultat d'existence suivant.

Théorème 1. *Le problème* (1) *sans imposer la condition de Neumann a un nombre infini de solutions non-triviales (i.e. $\rho \not\equiv 0$).*

La preuve de ce théorème consiste à ajouter un terme de diffusion $\varepsilon\Delta\rho$, avec $\varepsilon > 0$, à la deuxième équation de (1). En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, nous avons montré que ce problème avec diffusion admet une solution. Le résultat s'obtient par passage à la limite sur $\varepsilon \to 0$, voir [1].

Nous présenterons ensuite un algorithme des moindres carrés, décrit dans [1], qui minimise la distance entre les solutions de l'équation de Poisson $\Delta\varphi = -\rho$ et l'équation de continuité du courant $\operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0$. La convergence et la robustesse de cet algorithme seront validées dans le cas d'un anneau, pour lequel nous avons déterminé toutes les solutions radiales. Enfin, nous comparerons nos simulations numériques avec des résultats expérimentaux.

[1] M. Chauvier, S. Nicaise, C. Troestler, J. Venel. *Multiple solutions and simulations for an ion flow field problem applied to hvdc transmission lines*, 2025. Disponible sur HAL : `https://hal.science/hal-05357732`.

Contact : `madeline.chauvier@uphf.fr`