Analyse d'un système parabolique dégénéré modélisant la dynamique cellulaire au sein d'une crypte intestinale

Ahmad EL HAJJ, LMAC - Compiègne
Mohamad EL HAJJ CHEHADE, LMAC - Compiègne
Antoine ZUREK, LMAC - Compiègne

Dans cet exposé, nous présenterons un résultat d'éxistence de solutions (au sens faible) d'un système d'équations paraboliques dégénérées modélisant la dynamique de cellules au sein de cryptes intestinales. Une crypte est une invagination de l'épithélium intestinal constituée de différents types de cellules (souches (s), progénitrices (p), entérocytes (e) et cellules goblets (g)). Ces celllules sont essentielles au maintien de la barrière digestive et à son fonctionnement. Afin de mieux comprendre la dynamique deS cellules au sein des cryptes, un modèle mathématique de type diffusion croisée a été proposé dans la littérature [1, 2].
Ce modèle s'écrit comme suit : On définit dans un premier temps les ensembles

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}} := \{\mathrm{s}\}, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{p}} := \{\mathrm{p},\mathrm{s}\}, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{e}} := \{\mathrm{e},\mathrm{p}\}, \quad \mathcal{E}_{\mathrm{g}} := \{\mathrm{g},\mathrm{p}\}, \quad \mathcal{T} := \{\mathrm{s},\mathrm{p},\mathrm{e},\mathrm{g}\}.$$

L'évolution des densités ρ_{s}, ρ_{p}, ρ_{e} et ρ_{g}, ainsi que de la concentration en butyrate c_{b}, est alors modélisée, pour chaque $i \in \mathcal{T}$, par le système parabolique suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_i - \partial_x(\rho_i \partial_x \rho) &= f_i(x, \rho, (\rho_j)_{j\in\mathcal{E}_i}, c_{\mathrm{b}}), && \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t c_{\mathrm{b}} - \sigma_{\mathrm{b}} \partial_x^2 c_{\mathrm{b}} &= \gamma \frac{c_{\mathrm{b}} + c_{\mathrm{b}}^d}{1 + c_{\mathrm{b}} + c_{\mathrm{b}}^d} (\rho_{\mathrm{e}} + \rho_{\mathrm{g}}), && \text{dans } \Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

où $\rho = \sum_{i\in\mathcal{T}} \rho_i$ désigne la densité totale, $\Omega = (0,1)$ et les termes sources f_i sont lipschitziens et modélisent la division, la différentiation ou l'extrusion des cellules.
L'objectif de cet exposé est de présenter ce modèle ainsi que la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1 (voir [3])**.** *Sous certaines hypothèses, il existe des fonctions positives ρ_{s}, ρ_{p}, ρ_{e} et ρ_{g} telles que $\rho_i \in L^\infty(0,T;BV(\Omega))$ avec $\partial_t \rho_i \in L^2(0,T;(H^1)'(\Omega))$ pour tout $i \in \mathcal{T}$ et $\rho \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$. De plus, il existe une fonction positive $c_{\mathrm{b}} \in L^2(0,T;H)$ avec $\partial_t c_{\mathrm{b}} \in L^2(0,T;H')$ dont H' désigne le dual de $H := \{c \in H^1(\Omega) : c(1) = 0\}$. Par ailleurs, pour tout $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $i \in \mathcal{T}$, on a*

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \partial_t \rho_i \, \varphi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\Omega\times(0,T)} \rho_i \, \partial_x \rho \, \partial_x \varphi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\Omega\times(0,T)} f_i(x,\rho,(\rho_j)_{j\in\mathcal{E}_i}, c_{\mathrm{b}}) \, \varphi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

et pour tout $\psi \in L^2(0,T;H)$

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \partial_t c_{\mathrm{b}} \, \psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \sigma_{\mathrm{b}} \int_{\Omega\times(0,T)} \partial_x c_{\mathrm{b}} \, \partial_x \psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \gamma \int_{\Omega\times(0,T)} \frac{c_{\mathrm{b}} + c_{\mathrm{b}}^d}{1 + c_{\mathrm{b}} + c_{\mathrm{b}}^d} (\rho_{\mathrm{e}} + \rho_{\mathrm{g}}) \, \psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

[1] L. Darrigade. *Modélisation du dialogue hôte-microbiote au voisinage de l'épithélium de l'intestin distal.* Ph.D. thesis, Université Paris-Saclay, 2020.

[2] L. Darrigade, M. Haghebaert, C. Cherbuy, S. Labarthe, B. Laroche. *A PDMP model of the epithelial cell turn-over in the intestinal crypt including microbiota-derived regulations.* J. Math. Biol., **84(7)**, 67, 2022. doi :10.1007/s00285-022-01766-8. Id/No 60.

[3] A. El Hajj, M. El Hajj Chehade, A. Zurek. *Analysis of a degenerate parabolic system for cell dynamics in intestinal crypts*, 2026. Hal-05530330.

Contact : mohamad.el-hajj-chehade@utc.fr