

Application du Calcul Extérieur Discret (DEC) à la magnétohydrodynamique

Wail SOUICI, GAMMA3, UTT - Troyes
Brice PORTELENELLE, GAMMA3, UTT - Troyes
Dina RAZAFINDRALANDY, LaSIE, La Rochelle Université - La Rochelle
Emmanuelle ROUHAUD, GAMMA3, UTT - Troyes

Dans le domaine de la simulation numérique, la construction d'un schéma robuste est essentielle. La discrétisation classique des équations différentielles provoque souvent la perte de propriétés géométriques fondamentales. Les lois de conservation de la physique ne sont alors plus forcément vérifiées au niveau discret. Pour des systèmes physiques complexes couplant plusieurs dynamiques, comme en magnétohydrodynamique (MHD) [4], cette perte de structure peut conduire à des solutions qui ne respectent plus certaines propriétés essentielles du modèle. Pour pallier cela, nos travaux s'appuient sur le Calcul Extérieur Discret (DEC), initié par les travaux d'Hirani [3], et s'inscrivent dans la continuité des approches géométriques introduites par Bossavit [2] concernant l'utilisation des formes de Whitney en électromagnétisme computationnel. Au lieu d'approcher numériquement les opérateurs différentiels classiques, le DEC s'appuie sur le formalisme du calcul extérieur continu pour le transposer directement au monde discret. Ainsi, les grandeurs physiques ne sont plus de simples variables discrètes évaluées en des points, mais sont représentées par des p -formes différentielles intégrées sur les éléments géométriques du maillage (nœuds, arêtes, faces, cellules). Les opérateurs continus y sont traduits entre autres par la dérivée extérieure discrète d et l'opérateur de Hodge discret \star . L'avantage majeur de ce cadre géométrique est de satisfaire la propriété $d^2 = 0$ ainsi que le théorème de Stokes de manière exacte, préservant ainsi structurellement des invariants mathématiques et physiques du système continu.

Nous appliquons ce formalisme aux équations de la MHD, en étudiant à la fois le modèle idéal (sans dissipation) et le modèle résistif (intégrant la résistivité électrique et la viscosité). Afin de valider cette approche, différents schémas numériques sont implémentés dans un code de calcul en Fortran [1]. Ce poster présentera les résultats de notre étude de convergence spatio-temporelle sur des cas-tests hydrodynamiques fondamentaux. Nous y illustrerons concrètement l'impact de la régularité du maillage (structuré ou non-structuré) ainsi que l'influence de l'opérateur de Hodge discret (diagonal ou analytique) sur les erreurs spatiale et temporelle. Enfin, le poster mettra en perspective ces résultats avec nos travaux de validation en cours sur des cas-tests MHD standards, visant à démontrer la robustesse globale de cette méthode géométrique.

- [1] R. Ayoub. *Développement d'une méthode de discrétisation des edps basée sur le calcul extérieur discret*. Ph.D. thesis, La Rochelle Université, 2020. Disponible sur : <https://theses.hal.science/tel-03327048v1>.
- [2] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism : Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*. Academic Press, 1998.
- [3] A. N. Hirani. *Discrete exterior calculus*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 2003. Disponible sur : https://hirani.web.illinois.edu/papers/Hirani2003_PhD_Caltech.pdf.
- [4] C. Pagliantini. *Computational magnetohydrodynamics with discrete differential forms*. Ph.D. thesis, ETH Zurich, 2016. Disponible sur : <https://doi.org/10.3929/ethz-a-010722079>.